

УДК 532.59

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗОТРОПНОЙ ОКЕАНСКОЙ ЗЫБИ

В. В. Геогджаев<sup>1,2,\*</sup>, академик РАН В. Е. Захаров<sup>1,2,\*\*</sup>, С. И. Бадулин<sup>1,2,\*\*\*</sup>

Поступило 28.08.2019 г.

Новый алгоритм применяется для детального моделирования эволюции изотропной зыби в однородном океане. Показано, что установление спектра Захарова—Филоненко происходит взрывным образом за короткое время. Произведено численное определение слаботурбулентной колмогоровской константы.

*Ключевые слова:* морское волнение, зыбь, кинетическое уравнение, спектры Колмогорова—Захарова.

DOI: <https://doi.org/10.31857/S0869-56524895512-516>

### ВВЕДЕНИЕ

В настоящей статье, как и в [1], производится численное решение кинетического уравнения для волн на воде (уравнения Хассельманна) при отсутствии взаимодействия с ветром, т.е. воспроизводится эволюция свободной океанской зыби. Отличие от статьи [1] — это использование нового численного алгоритма. Ранее мы применяли код Ресио—Трейси [2], усовершенствованный нашей группой. В настоящей работе мы используем совершенно новый код, разработанный одним из авторов (В.В. Геогджаев). Детали его ещё не опубликованы, но новый код, существенно более точный и быстрый, уже применялся нами [3].

Новый код позволяет более полно, детально и убедительно подтвердить выводы слаботурбулентной теории ветрового волнения. Заметим, что сравнение с экспериментом главных предсказаний этой теории было уже проделано в работе [1]. Таким образом, данная статья имеет прежде всего теоретическое значение. Главные результаты, полученные в этой статье, следующие:

1. При умеренных значениях начальной крутизны ( $\mu < 0,1$ ) степенная асимптотика спектра возникает за несколько сот периодов исходных волн, т.е. почти на порядок быстрее, чем предсказывают размерностные оценки. Установление степенных асимптотик происходит взрывным образом, за конечное время;

2. Колмогоровская константа, найденная в численных экспериментах, с хорошей точностью

совпадает с предсказанной стационарной теорией, изложенной в статье [3]. Кроме того, работа показывает, что новый численный метод решения уравнения Хассельманна имеет хорошие перспективы.

### СЛАБОТУРБУЛЕНТНАЯ ТЕОРИЯ ОКЕАНСКОГО ВОЛНЕНИЯ (WTT)

История теории слабой турбулентности (Weak Turbulence Theory — WTT) началась с работы Филлипса [4], который высказал предположение, что основным физическим процессом для волн на поверхности океана является четырёхволновое взаимодействие. Взаимодействуют четвёрки волн (квадруплеты), волновые вектора которых связаны условиями резонанса

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 &= \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4, \\ \omega_1 + \omega_2 &= \omega_3 + \omega_4 \end{aligned} \quad (1)$$

( $\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{g|\mathbf{k}|}$  — закон дисперсии волн на глубокой воде).

В 1962 г. Клаусс Хассельманн вывел кинетическое уравнение для спектра волнового действия  $N_{\mathbf{k}}$  [5–7]. С учётом возбуждения волн ветром и диссипации за счёт обрушений, кинетическое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}}}{\partial t} + \frac{\partial \omega_{\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{k}} \frac{\partial N_{\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{r}} = S_{\text{nl}} + S_{\text{in}} + S_{\text{diss}}. \quad (2)$$

Здесь  $S_{\text{in}}$  описывает возмущение волн ветром,  $S_{\text{diss}}$  — их диссипацию в результате обрушений,  $S_{\text{nl}}$  — нелинейное взаимодействие, подчиняющееся резонансным условиям Филлипса (1). Член  $S_{\text{nl}}$  естественным образом разбивается на “приходящий” и “уходящий” члены [8]:

$$S_{\text{nl}} = F_{\mathbf{k}} - \Gamma_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}}. \quad (3)$$

Здесь

<sup>1</sup>Сколковский институт науки и технологий, Москва

<sup>2</sup>Институт океанологии П.П. Ширшова Российской Академии наук, Москва

\*E-mail: [vvg@mail.geogjaev.ru](mailto:vvg@mail.geogjaev.ru)

\*\*E-mail: [zakharov@math.arizona.edu](mailto:zakharov@math.arizona.edu)

\*\*\*E-mail: [badulin.si@ocean.ru](mailto:badulin.si@ocean.ru)

$$F_{\mathbf{k}} = \pi g^2 \int_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4} |T(\mathbf{k}, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4)|^2 N_2 N_3 N_4 \times \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4) \delta(\omega + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4) \times d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 d\mathbf{k}_4, \quad (4)$$

$$\Gamma_{\mathbf{k}} = \pi g^2 \int_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4} |T(\mathbf{k}, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4)|^2 \times (N_3 N_4 - N_2 N_3 - N_2 N_4) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4) \times \delta(\omega + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4) d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 d\mathbf{k}_4. \quad (5)$$

Ядро  $T_{\mathbf{k}_i \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3 \mathbf{k}_4}$  — однородная функция степени 3, подчиняющаяся условиям симметрии. Наиболее простое выражение для неё содержится в статье [3].

Явный вид неконсервативных членов  $S_{in}$  и  $S_{diss}$  является предметом дискуссии (см., например, [2]). Однако сейчас твёрдо установлено [8, 9], что эти члены, как правило, на порядок меньше, чем отдельные слагаемые члена  $S_{nl}$ . Поэтому построение детально разработанной аналитической теории ветрового волнения (такая программа была заявлена в статьях [10, 11]) следует начинать с систематического изучения временной эволюции пространственно однородной зыби, т.е. с решения уравнения

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}}}{\partial t} = S_{nl}. \quad (6)$$

Мы решали это уравнение в общем анизотропном случае в работе [1]. В данной работе мы детально изучаем изотропный случай. Будем предполагать, что поток волнового действия из области очень коротких волн отсутствует. Тогда полное волновое действие

$$N = \int N_{\mathbf{k}} d\mathbf{k} \quad (7)$$

является строгим интегралом движения, тогда как энергия

$$E = \int E_{\mathbf{k}} d\mathbf{k} \quad (8)$$

теряется за счёт потока в область больших волновых чисел посредством колмогоровского каскада. При этом единственное решение стационарного уравнения  $S_{nl} = 0$  есть

$$N(\mathbf{k}) = c_p \frac{|dE/dt|^{1/3}}{g^{2/3} |\mathbf{k}|^4}. \quad (9)$$

Это спектр Захарова—Филоненко, впервые найденный в работе [12],  $c_p$  — безразмерная колмогоровская константа, согласно работе [3]  $c_p = 0,194$ .

### ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Численное исследование проводилось для идеализированной задачи эволюции волнового поля

в однородном изотропном океане при отсутствии генерации и диссипации. Начальное состояние отвечало изотропному распределению, локализованному в области частот

$$0,04\pi < \omega < 4\pi \text{ rad/s} \quad 0,02 < f < 2 \text{ Hz}. \quad (10)$$

Такая постановка позволяет минимизировать число параметров задачи и сосредоточиться на вопросах качества алгоритма вычисления интеграла столкновений  $S_{nl}$ , не отвлекаясь на вопросы, связанные с нетривиальной зависимостью решений от угла (ср. [1]).

Использовалась логарифмическая сетка по частоте с инкрементом  $(\omega_{i+1} - \omega_i)/\omega_i = 1,03344$  (141 узел). Выбор 49 152 резонансных квадруплетов производился специальным образом, чтобы обеспечить оптимальное покрытие областей интенсивных взаимодействий [3]. Для частотного спектра энергии

$$\epsilon(\omega) d\omega = \frac{4\pi |\mathbf{k}|^2}{g} N(\mathbf{k}) d|\mathbf{k}| \quad (11)$$

колмогоровский спектр (спектр Захарова—Филоненко) имеет вид

$$\epsilon(\omega) = 4\pi c_p g^{4/3} \left| \frac{dE}{dt} \right|^{1/3} \omega^{-4}. \quad (12)$$

Начальное условие представляет собой “ступеньку”:  $\epsilon(\omega) = 2$ ;  $0,1 < \omega/2\pi < 0,2$ ;  $\epsilon(\omega) = 10^{-6}$  вне этой области. Характерный начальный период составляет около  $T = 7$  с. Начальная крутизна, определённая через среднюю частоту  $\omega_m$ :

$$\mu = \sqrt{\frac{E\omega_m^4}{g^2}} \approx 0,1. \quad (13)$$

Численный эксперимент для физического времени 200 000 с (около 56 ч) требует менее 2 ч машинного времени персонального компьютера и легко может быть продолжен до нескольких миллионов секунд. Код реализован для параллельных вычислений, что приближает его быстроедействие к требованиям оперативных моделей ветрового волнения.

Как и ожидалось, эволюция данного начального условия приводит к возникновению у спектра “колмогоровского хвоста”, описываемого в [12]. Колмогоровская асимптотика устанавливается “взрывным образом” за конечное время. Этот экспериментальный факт ещё нуждается в теоретическом объяснении. Из соображений размерности имеем

$$\frac{T}{\mu^4} \approx 70\,000 \text{ с}, \quad (14)$$

что на порядок больше наблюдаемых в эксперименте 3000 с. На рис. 1 совмещены начальный спектр и результат его эволюции при  $t = 3000$  с. Видно, что колмогоровская асимптотика вполне развита уже для времени около 400 начальных периодов.

Рисунок 2 представляет собой компенсированный спектр  $\epsilon(\omega)\omega^4/g^2$  в момент времени  $t \approx 15$  ч. Видно, что асимптотика (12) доминирует при частотах  $\omega > 4$  рад/с (период около 1,5 с, длина волны 3,5 м).

В работе [1] было показано, что эволюция широкого класса начальных условий приводит к установлению автомодельного решения

$$\epsilon(\omega, t) = \epsilon(\omega t^{1/11}). \tag{15}$$

Наш численный эксперимент показывает, что установление этого режима требует достаточно большого времени 50 000 с и более, т.е. более 7 000 начальных волновых периодов. Установление автомодельного режима показано на рис. 3 как эволюция нормированных на максимальное значение спектров в безразмерных частотах  $\omega/\omega_p$  ( $\omega_p$  — частота спектрального пика). Таким образом, стремление к автомодельному поведению в терминах форм спектров выражено заметно слабее, чем установление колмогоровского “хвоста” и поведение интегральных па-

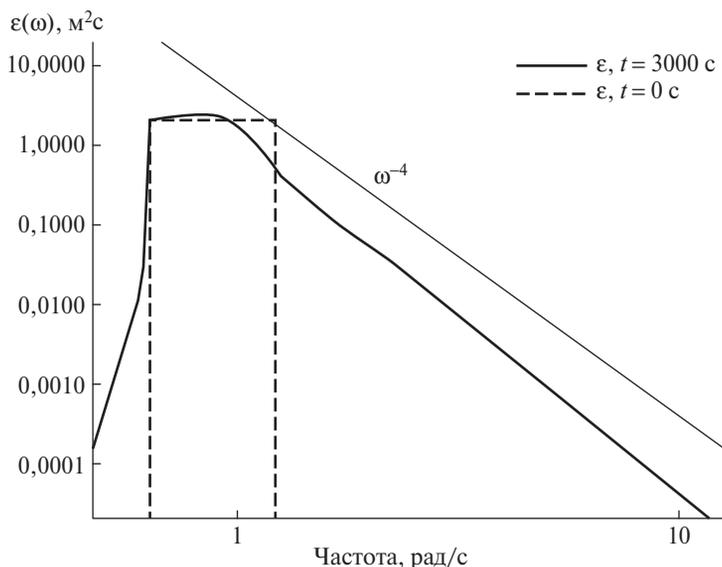


Рис. 1. Частотные спектры энергии в начальный момент  $t = 0$  и при  $t = 3000$  с. Видно установление степенного распределения.

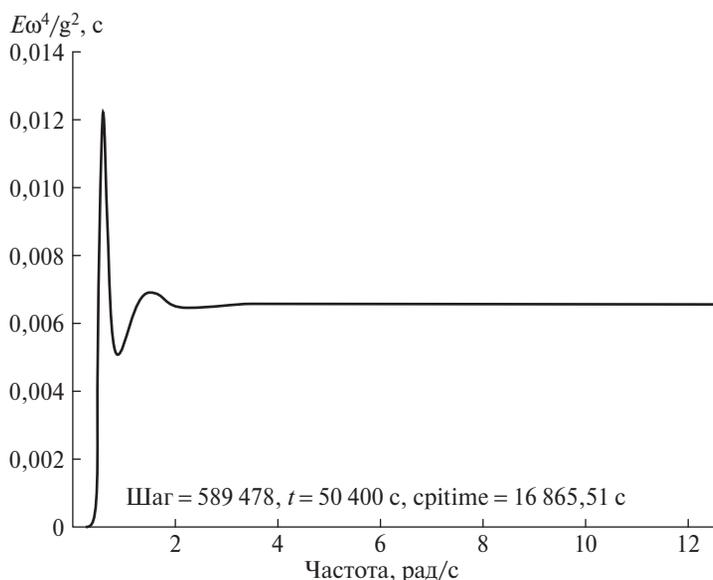


Рис. 2. Компенсированный спектр при  $t = 50 400$  с.

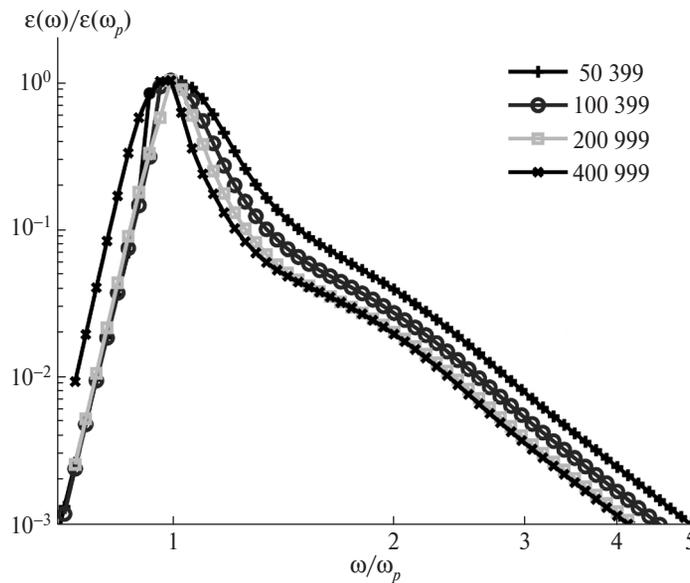


Рис. 3. Нормированные спектры энергии как функции безразмерной частоты в разные моменты времени (см. легенду, в с).

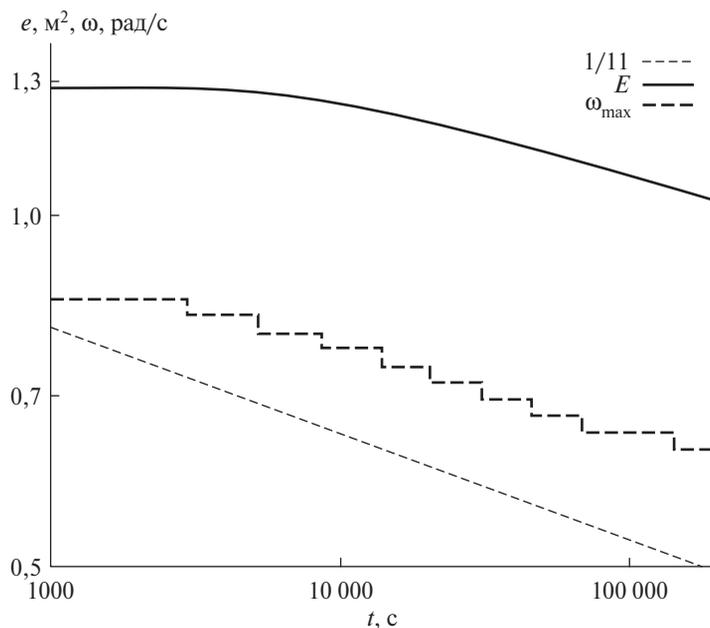


Рис. 4. Эволюция полной энергии и частоты спектрального пика для консервативного кинетического уравнения (1).

раметров зыби. Эта особенность подробно рассматривалась в [1].

На рис. 4 показана эволюция полной энергии и частоты спектрального пика в консервативном кинетическом уравнении (1). За 200 000 с теряется не более 30%, тем не менее этого темпа потери хватает для формирования слаботурбулентного колмогоровского спектра. Декремент убывает со временем. Оценка безразмерной константы  $c_p$  даёт  $c_p = 0,203$ , что вполне согласуется с теоретическим значением, найденным в [1].

## РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

Как было отмечено выше, основным результатом является демонстрация установления слаботурбулентных асимптотик для численных решений кинетического уравнения для волн на воде (уравнения Хассельманна). Важно, что результаты получены с помощью принципиально нового численного алгоритма, развитого В.В. Геогджаевым. Этот алгоритм позволяет приблизиться к требованиям оперативных моделей при несравнимо более высоких показателях

точности и разрешения по масштабам волн (по частотам и направлениям). Ранее проведённые численные исследования свойств решений кинетического уравнения [13, 14], показав соответствие основным результатам теории слабой турбулентности, обнаружили принципиальные ограничения алгоритма Вебба—Ресию—Трейси (Webb—Resio—Tracy [2, 15]) как по показателям точности, так и по быстройдействию.

Подчеркнём, что развиваемый алгоритм использует собственную параметризацию резонансных поверхностей (1), что позволяет точнее описывать спектральные потоки и достигать высоких показателей точности при относительно небольшом количестве резонансных квадруплетов. Этим он отличается от других подходов, в частности от применяемых в оперативных моделях версий Discrete Interaction Approximation.

**Источники финансирования.** Теоретическая часть работы выполнена в соответствии с темой госзадания Института океанологии П.П. Ширшова РАН, тема 0149–2019–0002. Численные расчёты поддержаны Российским научным фондом, проект № 19–72–30028.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Badulin S.I., Zakharov V.E.* // Nonl. Proc. Geophys. 2017. V. 24. P. 237.
2. *Tracy B., Resio D.* // WES Rep. 11. 1982. US Army, Engineer Waterways Experiment Station, Vicksburg, MS.
3. *Геогджаев В.В., Захаров В.Е.* // Письма в ЖЭТФ. 2017. № 106. С. 175.
4. *Phillips O.M.* // J. Fluid Mech. 1960. V. 9. P. 193.
5. *Hasselmann K.* // J. Fluid Mech. 1962. V. 12. P. 481.
6. *Hasselmann K.* // J. Fluid Mech. 1963a. V. 15. P. 273.
7. *Hasselmann K.* // J. Fluid Mech. 1963b. V. 15. P. 385.
8. *Захаров В.Е., Бадулин С.И.* // ДАН. 2011. Т. 440. С. 691–693.
9. *Zakharov V.E.* // Phys. Scr. 2010. V. 142. P. 014052.
10. *Zakharov V.E.* // Procedia IUTAM. 2018. V. 26. P. 43.
11. *Zakharov V.E., Badulin S.I., Geogjaev V.V., Pushkarev A.N.* // Earth and Space Science. 2019. <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/2018EA000471>
12. *Захаров В.Е., Филоненко Н.Н.* // ДАН. 1966. Т. 170. С. 1292–1296.
13. *Pushkarev A.N., Resio D., Zakharov V.E.* // Phys. D: Nonlin. Phenom. 2003. V. 184. № 29.
14. *Badulin S.I., Babanin A.V., Resio D., Zakharov V.E.* // IUTAM Symposium on Hamiltonian Dynamics, Vortex Structures, Turbulence (Springer), 2008. P. 45–47.
15. *Webb D.J.* // Deep Sea Res. 1978. V. 25. P. 279.

## NUMERICAL STUDY OF ISOTROPIC OCEAN SWELL

**V. V. Geogjaev, Academician of the RAS V. E. Zakharov, S. I. Badulin**

<sup>1</sup>*Skolkovsky Institute of Science and Technology, Moscow, Russian Federation*

<sup>2</sup>*P.P. Shirshov Institute of Oceanology, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

Received August 28, 2019

A new algorithm is used for detailed numerical study of the evolution of isotropic swell in a homogeneous ocean. It is shown that the Zakharov—Filonenko spectrum occurs in an explosive manner in a short time. The Kolmogorov constant of the solution is estimated numerically.

*Keywords:* isotropic swell in a homogeneous ocean, kinetic equation, Zakharov—Filonenko spectra.