

Отчет о проделанной работе с использованием оборудования ИВЦ НГУ

1. Аннотация

Волновая турбулентность, сопровождаемая возникновением в ней нелинейных когерентных структур, например солитонов, является необъятным направлением исследований в современной нелинейной динамике. Возникновение таких структур и явление волновой турбулентности регулярно наблюдаются в различных областях физики: оптоволоконной оптике, физике плазмы, гидродинамике, различных биологических и экономических системах. К причинам их возникновения можно отнести различные нелинейные эффекты, неустойчивости или внешние воздействия. Исследования, представленные в отчёте, были направлены на изучение когерентных структур и волновой турбулентности, возникающих в гидродинамике потенциальных течений идеальной несжимаемой бесконечно глубокой жидкости со свободной поверхностью в поле тяжести. В частности, была исследована солитонная турбулентность, а также обнаружены би-солитонные структуры в рамках иерархии уравнений для волн на глубокой воде, проведён анализ обнаруженных би-солитонных структур с помощью метода прямой и обратной задачи рассеяния (МОЗР) для одномерного фокусирующего нелинейного уравнения Шрёдингера (НУШ). Кроме того, были предложены новые приближённые модели для описания динамики двумерных волн, распространяющихся на поверхности трёхмерной жидкости. По результатам работы была защищена диссертация Дремова С.В. "Когерентные структуры в волновой турбулентности: теория и численный эксперимент".

2. Тема работы

Когерентные структуры в волновой турбулентности: теория и численный эксперимент.

3. Состав коллектива

Качулин Дмитрий Игоревич, к.ф.-м.н., с.н.с. лаборатории нелинейных волновых процессов ФФ НГУ до 2020 г., н.с. лаборатории нелинейной фотоники ФФ НГУ с 2021 г.

Дремов Сергей Вячеславович, аспирант НГУ до 2022 г., инженер Лаборатории нелинейных волновых процессов ФФ НГУ до 2022 г. С 2019 г. стажёр-исследователь лаборатории интегрируемых систем и турбулентности центра перспективных исследований Сколковского института науки и технологий.

Дьяченко Александр Иванович, д.ф.-м.н., в.н.с. Института теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН.

4. Информация о грантах

РНФ, конкурс 2018 года по мероприятию «Проведение инициативных исследований молодыми учеными» Президентской программы исследовательских проектов, реализуемых ведущими учеными, в том числе молодыми учеными. Грант № 18-71-00079 «Когерентные структуры на поверхности глубокой воды и их роль в формировании волн экстремальной амплитуды». Руководитель — Д.И. Качулин.

РНФ, конкурс 2019 года по мероприятию «Проведение исследований научными лабораториями мирового уровня в рамках реализации приоритетов научно-технологического развития Российской Федерации» Президентской программы исследовательских проектов, реализуемых ведущими учеными, в том числе молодыми учеными. Грант № 19-72-30028 «Турбулентность и когерентные структуры в интегрируемых и неинтегрируемых системах». Руководитель – В.Е. Захаров (С 2023 г. – Е.А. Кузнецов)

РФФИ, «Аспиранты», Конкурс на лучшие проекты фундаментальных научных исследований, выполняемые молодыми учеными, обучающимися в аспирантуре. Грант № 20-31-90093 «Когерентные структуры и сейши в слабонелинейных моделях для поверхностных волн», 2020г. Руководитель – Д.И. Качулин.

5. Научное содержание работы

5.1. Постановка задачи

1. Исследовать солитонную турбулентность в рамках суперкомпактного уравнения Дьяченко-Захарова. Рассмотреть однократное столкновение пары солитонов и получить аналитические оценки для изменения числа частиц (волн) каждого из солитонов. Провести серию численных экспериментов по многократным столкновениям различного числа солитонов с различными начальными амплитудами, скоростями и фазами в периодической области. Провести сравнение результатов численного моделирования с полученными аналитическими оценками.
2. Реализовать численный алгоритм для нахождения би-солитонных структур в рамках суперкомпактного уравнения Дьяченко-Захарова, а также в рамках точной системы нелинейных уравнений в конформных переменных. В качестве начальных условий для нахождения би-солитонных структур использовать известные точные би-солитонные решения нелинейного уравнения Шрёдингера, а также два одиночных солитона суперкомпактного уравнения, найденных методом Петвиашвили и помещённых в одну точку пространственной области. Численно исследовать динамику структур при различных определяющих параметрах — крутизне и соотношении амплитуд.
3. Провести анализ волновых полей найденных би-солитонных структур с помощью метода прямой и обратной задачи рассеяния для одномерного фокусирующего нелинейного уравнения Шрёдингера. Численно решить задачу Захарова-Шабата с последующим получением спектральных данных, включающих собственные значения, характеризующие каждый из солитонов в структуре. Произвести оценку вклада непрерывного спектра в волновое поле.
4. На основе компактных форм уравнения Захарова для случая одномерных волн разработать приближённую аналитическую модель для описания динамики двумерных гравитационных волн, распространяющихся на свободной поверхности трёхмерной идеальной несжимаемой глубокой жидкости в поле тяжести. Для проверки модели рассмотреть задачу о возмущённой стоячей волне в канале с гладкими вертикальными стенками.

5.2. Современное состояние проблемы

Волновая турбулентность, сопровождаемая образованием и взаимодействием в ней различных нелинейных когерентных структур, например солитонов, широко распространена в природе и давно привлекает внимание исследователей. В большинстве случаев при исследовании солитонов и их связанных состояний в нелинейных уравнениях фундаментом для изучения являются интегрируемые уравнения с известными аналитическими решениями. В случае исследования динамики и взаимодействия гравитационных волн на поверхности идеальной несжимаемой глубокой жидкости единственной известной интегрируемой моделью является нелинейное уравнение Шрёдингера (НУШ). Однако НУШ выведено в предположении узости спектральной ширины волнового пакета, а потому содержит в себе ограничения, не позволяющие корректно описывать некоторые нелинейные эффекты, к примеру, образование волн экстремальной амплитуды и др. В связи с этим требуется использование более точных моделей.

Одной из таких моделей является суперкомпактное уравнение Дьяченко-Захарова, рассматривающее распространение однонаправленных волн. Кроме того, имеется полная система нелинейных уравнений, записанная в конформных переменных, позволяющая точно решать исходную задачу о потенциальном течении идеальной несжимаемой бесконечно глубокой жидкости в поле тяжести, ограниченной сверху свободной поверхностью. В совокупности суперкомпактное и полные уравнения представляются оптимальным инструментом для исследования солитонной турбулентности.

Ключевые особенности изучения солитонной турбулентности в рамках неинтегрируемых моделей заключаются в том, что в отличие от интегрируемых уравнений, например НУШ, солитоны могут обмениваться энергией, их амплитуды, фазы и скорости при этом изменяются, общее количество солитонов тоже может измениться. В числе первых работ по исследованию солитонной турбулентности в неинтегрируемых системах находится работа [1]. Основное внимание было уделено возможности термодинамического равновесия между солитонами и спектром слабо-нелинейных волн с точки зрения системы "жидкость-пар", где солитоны играли роль капель жидкости. Было

показано, что термодинамически выгодным является состояние, при котором амплитуда солитонов растет по мере уменьшения их числа, а "слабые" солитоны поглощаются "сильными".

Кроме того, описание солитонной турбулентности в рамках НУШ и суперкомпактного уравнения существенно отличается. Например, в работе [2] были продемонстрированы значительные различия в динамике столкновения пары однонаправленных солитонов на поверхности глубокой воды в модели суперкомпактного уравнения по сравнению с динамикой столкновений солитонов огибающей в модели НУШ. Было показано, что взаимодействие солитонов в суперкомпактном уравнении носит более сложный характер — в зависимости от их относительной фазы один из солитонов может забрать энергию у второго и наоборот, чего не наблюдается в модели НУШ.

Таким образом, с одной стороны теория предсказывает, что после большого количества столкновений нескольких солитонов должен остаться только один. С другой стороны, известно, что солитоны способны как отдать свою энергию, так и забрать её в зависимости от относительной фазы. Ожидаемый вопрос при этом — что же всё-таки произойдет с системой при рассмотрении периодической области (бесконечная цепочка из солитонов), в которой происходит многократное столкновение таких солитонов? Окажется ли влияние относительной фазы существенным при большом количестве столкновений или на больших временах её влиянием можно пренебречь?

В дополнение к этому, в ходе исследований было обнаружено, что солитоны суперкомпактного уравнения способны связываться в одну периодически осциллирующую структуру, напоминающую известное би-солитонное решение НУШ. Это открытие наводило на мысль, что в суперкомпактном уравнении, а может быть, и в точных уравнениях тоже существуют аналоги таких би-солитонов.

Основная сложность заключается в методе нахождения решений би-солитонного типа в рассматриваемых уравнениях. Получить какие-либо аналитические выражения для таких решений не представляется возможным, поэтому, по-видимому, искать такие решения на данный момент можно только численно. В случае суперкомпактного уравнения решение в виде одиночного солитона можно получить точно с помощью метода Петвиашвили, однако его применимость ограничена нахождением одиночных стационарных решений нелинейных волновых уравнений, поэтому метод не подходит для поиска периодического по времени решения в виде би-солитона. Для точных уравнений на данный момент вообще неизвестны методы, позволяющие найти какие-либо решения.

Тем не менее, попытаться численно найти би-солитонные решения можно с помощью алгоритма, описанного в работе [3], где был впервые получен одиночный бризер в рамках точных уравнений. Для нахождения таких решений авторами был разработан специальный численный алгоритм, основанный на подстановке точных солитонных решений НУШ в качестве начальных условий в полную систему нелинейных уравнений с последующей фильтрацией излученных некогерентных волн, возникающих в процессе эволюции. В результате авторам статьи удалось доказать существование узких бризеров большой крутизны, распространяющихся без потерь энергии на протяжении сотен периодов характерных волн. Данный результат стал отправной точкой для последующего экспериментального наблюдения и исследования таких объектов на поверхности глубокой воды. Возможно, что нахождение би-солитонных решений в суперкомпактном и точных уравнениях также сможет стать стимулом для дальнейших исследований. Кроме того, наличие предельного перехода от суперкомпактного уравнения к НУШ открывает возможности для использования инструментов, обычно применяемых для НУШ. Одним из самых известных инструментов для анализа волновых полей является метод прямой и обратной задачи рассеяния (МОЗР). Применение МОЗР к области гидродинамики на сегодняшний день является очень развивающимся и перспективным направлением.

До сих пор обсуждался случай одномерных волн и двумерной жидкости. Разумеется, более близким к действительности, и в то же время более сложным, является рассмотрение двумерных волн, распространяющихся по поверхности трёхмерной жидкости. Численное моделирование двумерных волн само по себе является нетривиальной задачей. В отличие от одномерного случая здесь нет полной модели, которая бы точно описывала двумерные волны. Полные RV -уравнения в конформных переменных уже невозможно использовать в такой геометрии. Прямое численное моделирование уравнения Захарова осложняется входящим в него коэффициентом четырёхволнового взаимодействия, который в случае двумерных волн является очень сложным. Тем не менее, на основе одномерной версии уравнения Захарова можно получить так называемые компактные формы, которые затем можно обобщить на двумерный случай. Такой подход позволяет получить уже двумерные уравнения, которые сохраняют свою компактную форму и, таким образом, являются эффективными с точки зрения численного моделирования.

1. Крылов С. Ф., Яньков В. В. О роли солитонов в сильной турбулентности // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1980. – Т. 79. – №. 1-3. – С. 82.
2. Kachulin D., Gelash A. On the phase dependence of the soliton collisions in the Dyachenko–Zakharov envelope equation // Nonlinear Processes in Geophysics. – 2018. – Т. 25. – №. 3. – С. 553-563.
3. Dyachenko A. I., Zakharov V. E. On the formation of freak waves on the surface of deep water // JETP letters. – 2008. – Т. 88. – С. 307-311.

5.3. Подробное описание работы, включая используемые алгоритмы

Одним из наиболее распространённых методов исследования динамики гравитационных волн на глубокой воде является прямое численное моделирование. Нелинейное уравнение Шрёдингера, приближённое суперкомпактное уравнение Дьяченко-Захарова и точная система уравнений в конформных переменных в совокупности представляются оптимальным и эффективным инструментом для исследований. Результаты, полученные первоначально в рамках простого с вычислительной точки зрения суперкомпактного уравнения, могут быть дополнительно проверены в точных уравнениях.

Суперкомпактное уравнение содержит нелокальные слагаемые в виде оператора \hat{k} , который может быть легко вычислен только в Фурье-пространстве, поэтому в работе рассматривались периодические граничные условия. Численное решение задачи Коши с периодическими граничными условиями производилось с помощью псевдо-спектрального метода Фурье с использованием быстрых преобразований Фурье библиотеки FFTW. Умножение сеточных функций выполнялось в x -пространстве, а вычисление производных и нелокальных слагаемых — в Фурье-пространстве. Для интегрирования по времени использовался метод Рунге-Кутты 4 порядка точности. Корректность результатов проверялась сохранением интегралов движения в процессе эволюции. В случае двумерных уравнений также производилось распараллеливание численного алгоритма при помощи инструментов OpenMP, для параллельных Фурье-преобразований использовалась библиотека FFTW_threads.

Точные уравнения также решались с помощью псевдо-спектрального метода Фурье с интегрированием по времени методом Рунге-Кутты 4 порядка точности. При конформном преобразовании узлы сетки в конформных переменных не совпадают с узлами исходной сетки, в связи с чем необходимо применять интерполяцию для нахождения значений функции (поверхности и потенциала) на сетке в конформных переменных. Для этого использовался известный ряд Фурье данной функции, по которому вычислялось значение функции в произвольной точке в x -пространстве. Точность интерполяции функции контролировалась с помощью метода простых итераций.

Для численного нахождения би-солитонного решения в суперкомпактном и точных уравнениях использовался численный алгоритм, аналогичный использованному в работе [Dyachenko et al., 2008] (см. выше). В качестве начальных условий задавалось би-солитонное решение НУШ. Излучение некогерентных волн подавлялось с помощью включения в расчётах механизма затухания, сосредоточенного на краях расчётной области. Альтернативой начальным условиям в виде би-солитонов НУШ выступало задание нескольких одиночных солитонов суперкомпактного уравнения, расположенных одной точке пространственной области. В этом случае солитоны находились с помощью метода Петвиашвили.

Будучи не являясь решением рассматриваемых уравнений, в процессе расчета временной эволюции исходный би-солитон начинает излучать некогерентные волны. Для подавления таких волн использовалась процедура затухания, для чего в правую часть уравнений добавлялось слагаемое следующего вида:

$$\frac{\partial c(x, t)}{\partial t} = \dots - \gamma f(x)c(x, t) \quad (1)$$

$$f(x) = \cos^6\left(\frac{\pi x}{L}\right), L - \text{длина периодической области} \quad (2)$$

Выбранная функция $f(x)$ и коэффициент γ концентрирует затухание на краях расчётной области, не затрагивая саму структуру, которая всегда находится в центре области, так как вычисления проводятся в системе отчёта, двигающейся с групповой скоростью начального би-солитона $V_0 \approx 6.25$ м/с. В процессе образования некогерентных волн групповая скорость оставшейся когерентной структуры изменяется. Поэтому, для того чтобы она всегда оставалась в центре, скорость системы отсчета постоянно корректировалась. Корректировочная добавка к скорости рассчитывалась по смещению

максимума структуры за фиксированный промежуток времени с осреднением результата. Коэффициент γ не должен выбираться слишком большим, чтобы избежать численной неустойчивости. С другой стороны, он не должен быть слишком маленьким, иначе возникающее излучение не будет затухать.

Размерные параметры в экспериментах выбирались следующими: характерное безразмерное волновое число $\tilde{k}_0 = 100$, в размерных единицах $k_0 = \frac{2\pi}{L}\tilde{k}_0 \approx 0.0628 \text{ м.}^{-1}$, в таком случае характерная частота $\omega_0 \approx 0.785 \text{ с.}^{-1}$, а групповая скорость $V_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k_0}} \approx 6.25 \text{ м/с.}$, коэффициент γ выбирался в диапазоне $10^{-2} - 10^{-3}$.

Численное решение задачи Захарова-Шабата производилось с помощью метода Фурье-коллокаций, для Фурье-преобразований использовалась библиотека FFTPACK.

Запишем систему в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} i\frac{\partial}{\partial x} & -iq(x) \\ iq^*(x) & -i\frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Так как в работе рассматриваются периодические граничные условия, систему уравнений (3) можно переписать в Фурье-представлении (метод Фурье-коллокаций):

$$q(x) = \sum_k q_k e^{ikx}, \quad \phi_1 = \sum_k \phi_1^k e^{ikx}, \quad \phi_2 = \sum_k \phi_2^k e^{ikx} \quad (4)$$

Подставляя выражения (4) в (3) и приравнявая коэффициенты при одинаковых Фурье-гармониках, можно получить следующую систему уравнений:

$$\begin{pmatrix} -B_1 & B_2 \\ B_2^* & B_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Здесь $B_1 = i \text{diag}(-N/2; \dots; 0; \dots; N/2)$ — диагональная матрица размера $N \times N$, где N — число рассматриваемых Фурье-гармоник (точек),

$$\text{а матрица } B_2 = \begin{pmatrix} q_0 & q_{-1} & \cdots & q_{-N/2} & \cdots & 0 \\ q_1 & q_0 & q_{-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & q_1 & q_0 & \ddots & \ddots & q_{-N/2} \\ q_{N/2} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & q_0 & q_{-1} \\ 0 & \cdots & q_{N/2} & \cdots & q_1 & q_0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$A_1 = (\phi_1^{-N/2}; \dots; \phi_1^0; \dots; \phi_1^{N/2})^T, \quad A_2 = (\phi_2^{-N/2}; \dots; \phi_2^0; \dots; \phi_2^{N/2})^T$$

Собственные значения расширенной матрицы можно вычислить с помощью стандартных QR-алгоритмов в случае небольших N . В противном случае можно вычислять часть собственных значений с помощью различных итерационных алгоритмов. В данной работе для нахождения собственных значений использовалось $N = 512$ точек.

5.4. Полученные результаты

1. Динамика многократных столкновений солитонов в рамках суперкомпактного уравнения Дьяченко-Захарова не зависит от их изначального количества, начальной относительной фазы, крутизны и скорости. После многократных столкновений любого количества солитонов в периодической области останется только один солитон (Рис. 1). Результат также подтверждается полученными аналитическими оценками:

$$\Delta N_1 = \frac{\left(\frac{k_0^6}{4} N_2^2 + \left(U_2 + \frac{V_0 k_{tw}}{2k_0} \right)^2 \right) \delta N + 2N_1 \Delta U_1 (U_1 - U_2)}{\frac{k_0^6}{4} (N_1^2 - N_2^2) - (U_1 - U_2)^2},$$

$$\Delta N_2 = - \frac{\left(\frac{k_0^6}{4} N_1^2 + \left(U_1 + \frac{V_0 k_w}{2k_0} \right)^2 \right) \delta N - 2N_2 \Delta U_2 (U_1 - U_2)}{\frac{k_0^6}{4} (N_1^2 - N_2^2) + (U_1 - U_2)^2}$$

Так как рассматривались однонаправленные солитоны ($U_1 \approx U_2$), то вторые слагаемые в числителе и в знаменателе выражений для ΔN_1 и ΔN_2 очень малы. Если дополнительно учесть, что изначально число частиц (волн) у первого солитона больше, чем у второго ($N_1 > N_2$), то выражение для ΔN_1 всегда положительно, а для ΔN_2 — всегда отрицательно. Это означает, что первый солитон будет всё время забирать энергию у второго, до тех пор пока полностью его не поглотит. Именно такой сценарий наблюдается в численных экспериментах.

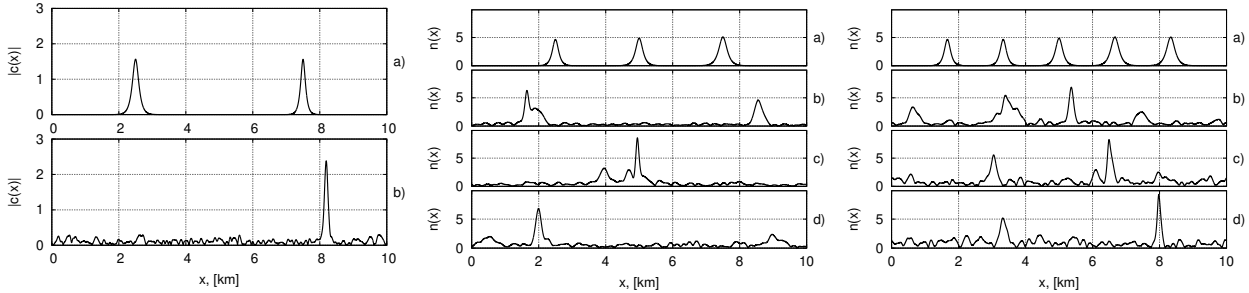


Рис. 1: Динамика многократных столкновений солитонов в рамках суперкомпактного уравнения Дьяченко-Захарова. После многократных столкновений в расчётной области остаётся только один солитон.

Фильм с динамикой взаимодействия трёх солитонов можно найти по следующей ссылке: https://home.itp.ac.ru/~kachulin/PhD_Dremov/DZE_3_Sol.mp4

Фильм с динамикой взаимодействия пяти солитонов можно найти здесь: https://home.itp.ac.ru/~kachulin/PhD_Dremov/DZE_5_Sol.mp4

2. В рамках суперкомпактного и RV -уравнений существуют би-солитонные структуры, напоминающие известные би-солитонные решения НУШ. Они стабильно распространяются по поверхности жидкости в течение сотен тысяч характерных периодов волн, не теряя при этом свою энергию.

На рисунке 2 показаны профили получившихся би-солитонных структур при использовании в качестве начальных условий би-солитонов НУШ с различной крутизной. Профили построены через некоторое время после отключения затухания. Изначальная крутизна составляла 0.1, 0.2, 0.3 и 0.4, а результирующая крутизна достигала $\approx 0.09, 0.18, 0.25$ и 0.35 соответственно. Сам процесс затухания длился $3 \cdot 10^5$ секунд, продолжительность выбиралась таким образом, чтобы контролировать уровень излучения в диапазоне $10^{-2} - 10^{-3}$ или 0,5 - 1% от максимальной амплитуды структуры.

Более наглядно общая динамика и процесс получения би-солитонной структуры в рамках суперкомпактного уравнения представлены в следующем фильме: https://home.itp.ac.ru/~kachulin/PhD_Dremov/DZE_BS_mu02_long_film.mp4

Подробная динамика би-солитонной структуры в течение одного периода осцилляций представлена в следующем фильме: https://home.itp.ac.ru/~kachulin/PhD_Dremov/DZE_BS_mu02_short_film.mp4

На рисунке 3 показан пример связанной би-солитонной структуры с конечной крутизной 0.25. Она была получена с помощью би-солитона НУШ с начальной крутизной 0.3, использованного в качестве начального условия. В левой части показан профиль поверхности $\eta(x)$, а в правой показан квадрат поверхности $\eta^2(x)$ в логарифмическом масштабе для контроля уровня излучения. Видно, что уровень излучения на 3-4 порядка меньше основной амплитуды. Как и в других случаях, структура существует стабильно и не теряет энергию.

Более наглядно с динамикой би-солитонной структуры в рамках полных уравнений можно ознакомиться в фильме по ссылке: https://home.itp.ac.ru/~kachulin/PhD_Dremov/RVE_BS_mu02_film.mp4

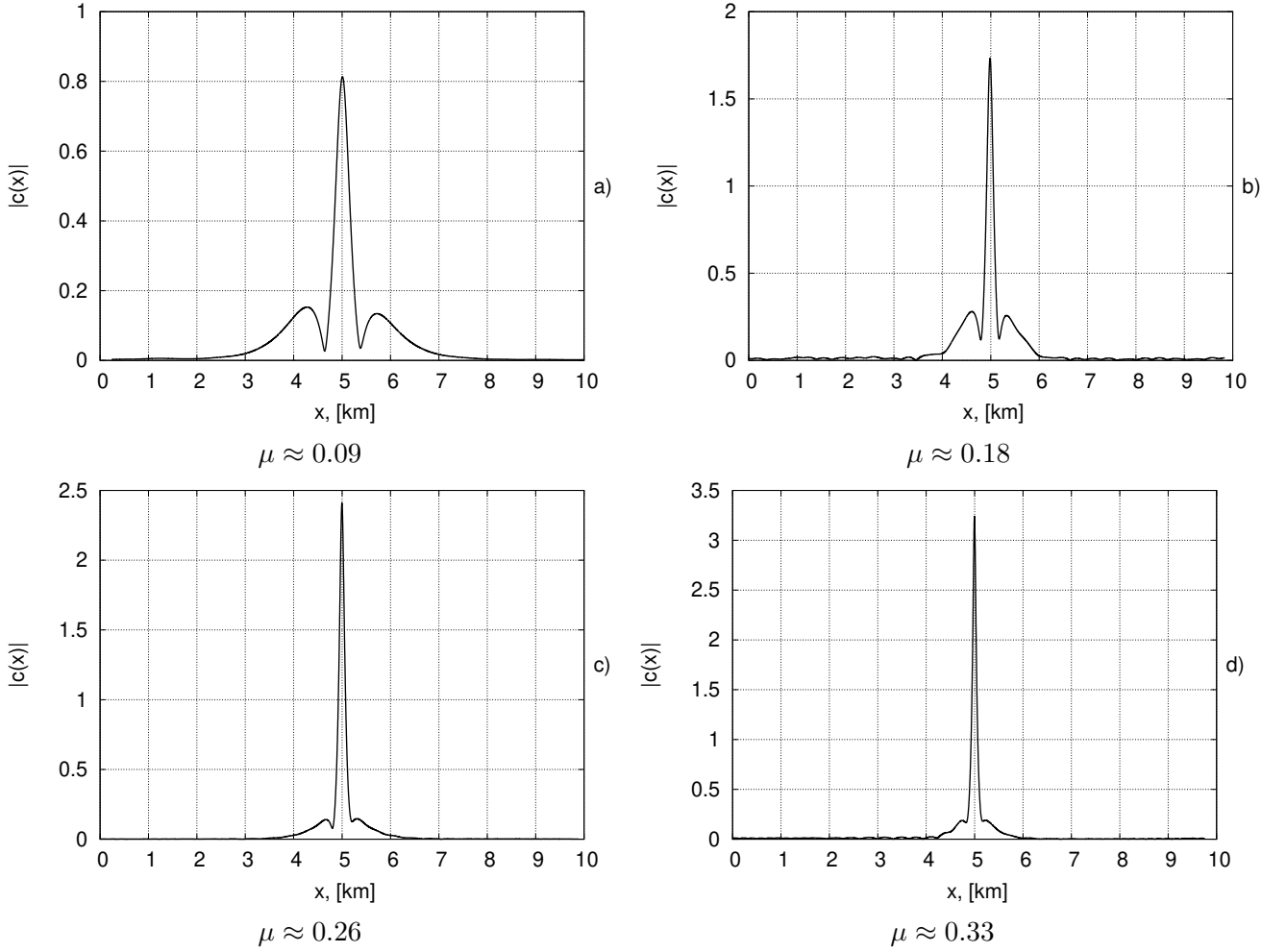


Рис. 2: Примеры би-солитонных структур с различной крутизной в рамках суперкомпактного уравнения.

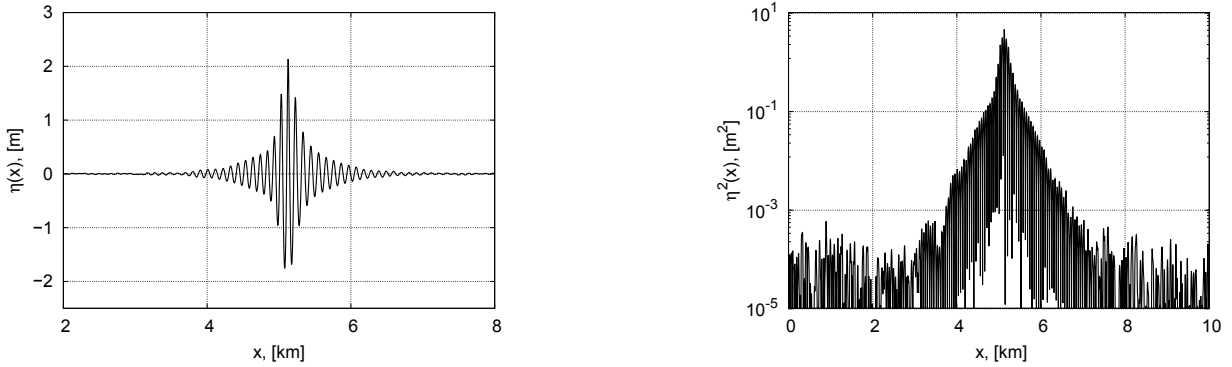


Рис. 3: Пример би-солитонной структуры с крутизной 0.25 в рамках полных RV -уравнений. Слева представлен профиль поверхности $\eta(x)$, а справа — квадрат поверхности $\eta^2(x)$ в логарифмическом масштабе для контроля уровня излучения.

3. Би-солитонные структуры суперкомпактного и RV -уравнений характеризуются дискретным и непрерывным спектрами, ассоциированными с МОЗР для одномерного фокусирующего НУШ. Собственные значения, представляющие дискретный спектр, совершают периодическое движение вдоль стабильных траекторий на комплексной плоскости. Между дискретным и непрерывным спектром МОЗР происходит периодический обмен энергией.

На рисунке 4 представлен анализ би-солитонной структуры суперкомпактного уравнения с помощью МОЗР. Метод обнаружил два собственных значения, каждый из которых характеризует "большой" и "маленький" солитон в структуре. Собственные значения совершают периодическое движение вдоль траекторий, которые также остаются стабильными в течение сотен

периодов осцилляций структуры.

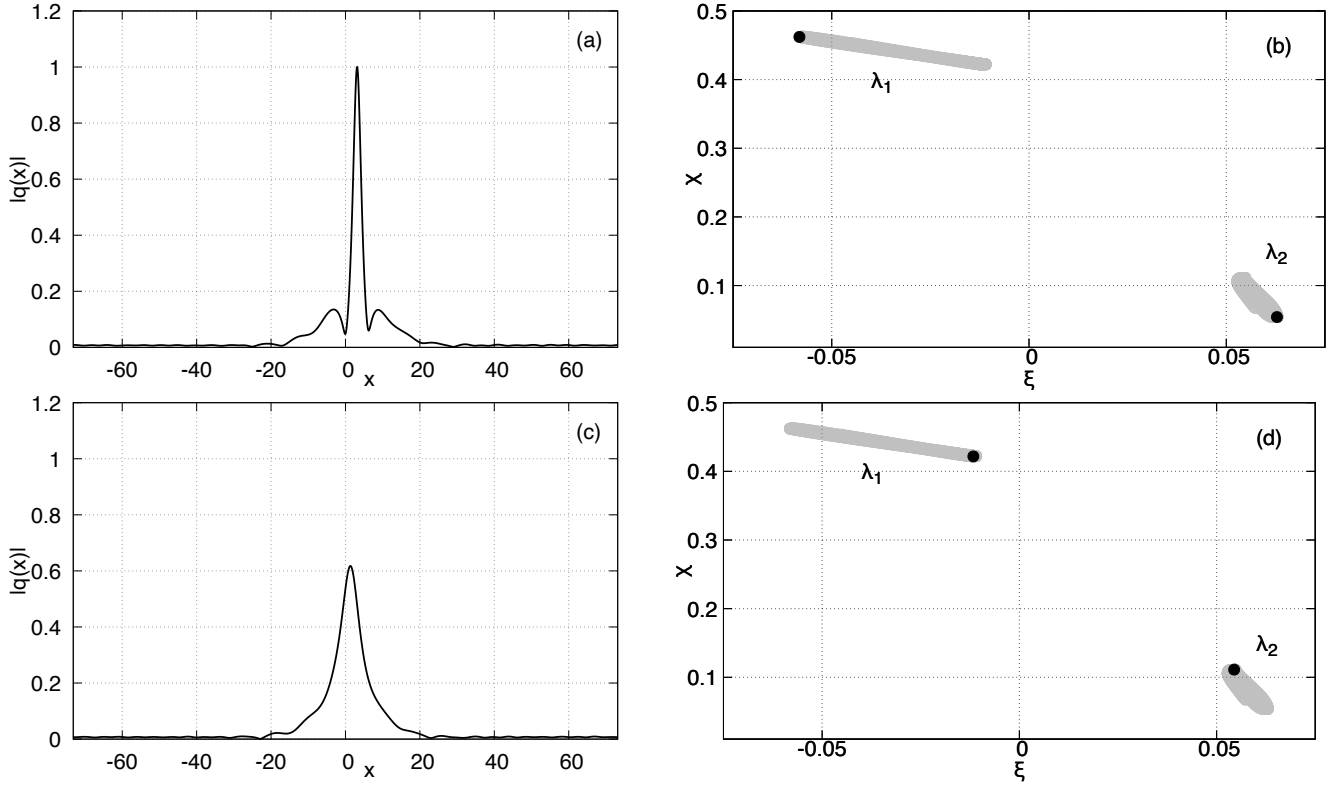


Рис. 4: Профили би-солитона в переменной (x) суперкомпактного уравнения в момент достижения максимума (a) и минимума (c) амплитуды, а также периодическая динамика соответствующих собственных значений $\lambda = \xi + i\chi$ (b), (d). Собственные значения совершают периодическое движение вдоль траекторий, обозначенных серым цветом. Чёрными точками обозначены собственные значения в данный фиксированный момент времени, при котором волновое поле достигает своего максимума или минимума.

Полученный дискретный спектр позволяет также определить вклад непрерывного спектра в волновое поле, например, через полный интеграл движения:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |q|^2 dx \quad (7)$$

Согласно формализму задачи рассеяния:

$$I_m^{\text{DS}} = \frac{(2i)^m}{m} \sum_{j=1}^N [(\lambda_j^m)^* - \lambda_j^m], \quad I_m^{\text{CS}} = I_m - I_m^{\text{DS}}. \quad (8)$$

Используя рассчитанные данные, можно увидеть, что вклад непрерывного спектра в рамках суперкомпактного уравнения изменяется от **0.5%** до **3.5%**. Он минимален при минимуме амплитуды би-солитонной структуры, и максимален при максимуме амплитуды. Другими словами, между дискретным и непрерывным спектром наблюдается периодический обмен энергией.

На рисунке 5 представлен анализ би-солитонной структуры полных RV -уравнений с помощью МОЗР. Метод также обнаружил два собственных значения, совершающих почти-периодическое движение. В данном случае траектории слегка расходятся, содержат изгибы и становятся незамкнутыми. Это вполне объясняется сложностью полных уравнений, кроме того извлечение огибающей $q(x)$ из полных уравнений — это отдельный нетривиальный вопрос. В данном случае это делается приближённо, что также объясняет некоторое расхождение результатов с теми, что были получены в рамках суперкомпактного уравнения. Тем не менее, качественно динамика остаётся схожей.

По аналогии с суперкомпактным уравнением, используя данные, полученные в рамках численных экспериментов можно увидеть, что вклад непрерывного спектра в полных уравнениях изменяется от **1%** до **5.7%**. Таким образом, в полных уравнениях также наблюдается периодический обмен энергией между спектрами.

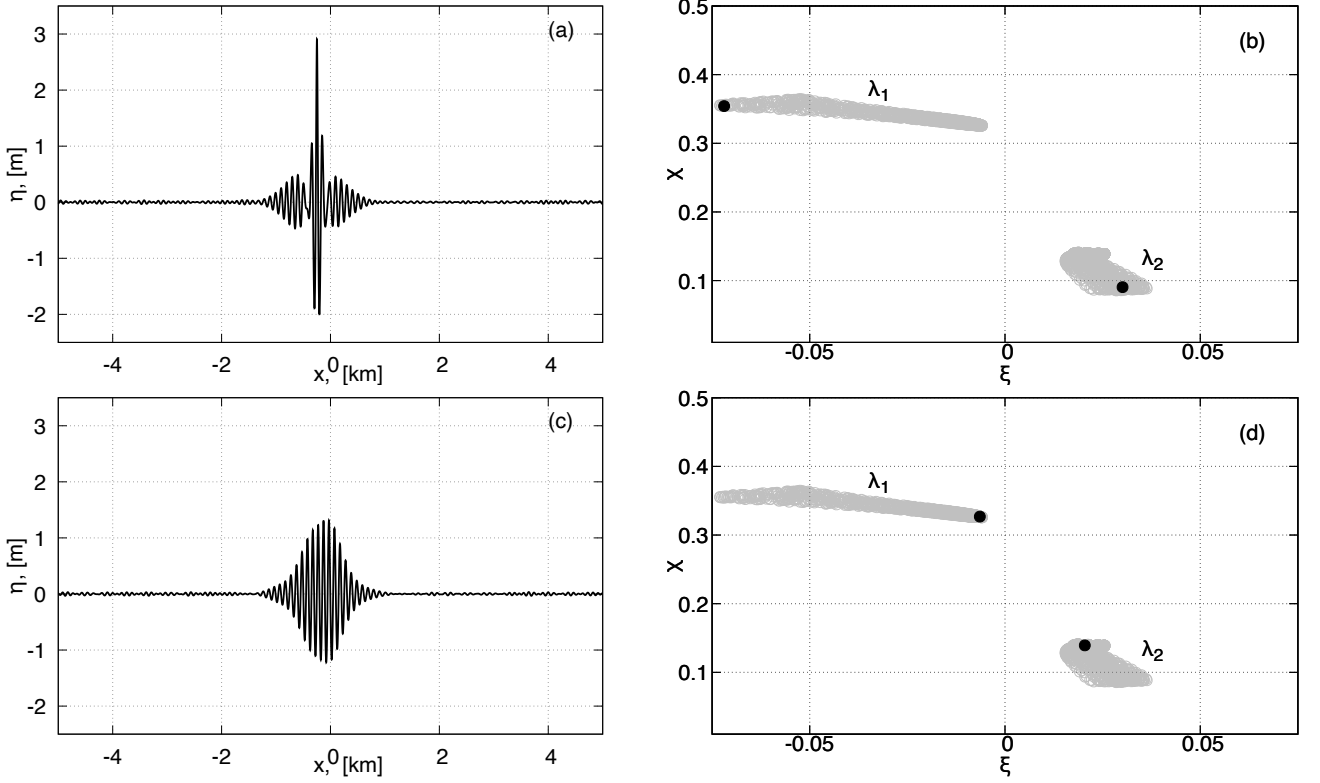


Рис. 5: Профили поверхности $\eta(x)$ би-солитонной структуры точных RV -уравнений в момент достижения максимума (а) и минимума (с) амплитуды, а также периодическая динамика соответствующих собственных значений $\lambda = \xi + i\chi$ (b), (d). Собственные значения совершают периодическое движение вдоль траекторий, обозначенных серым цветом. Чёрными точками обозначены собственные значения в данный фиксированный момент времени, при котором волновое поле достигает своего максимума или минимума.

4. Новые приближённые гамильтоновы модели, предложенные для описания динамики двумерных волн, распространяющихся по поверхности трёхмерной идеальной несжимаемой глубокой жидкости в поле тяжести, корректно описывают физические явления, связанные с устойчивостью и резонансным взаимодействием волн, не содержат неустойчивостей в высокочастотной части спектра и являются эффективными с точки зрения численного моделирования.

Полученное уравнение для двумерных волн в терминах канонической переменной $b(x, y, t)$ выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
i\frac{\partial b}{\partial t} &= \hat{\omega}_{\vec{k}}b - \frac{1}{4}\left[2(\nabla b) \cdot \hat{k}(\nabla b)b^* + (\nabla b) \cdot (\nabla b)\hat{k}(b^*) + \hat{k}((\nabla b) \cdot (\nabla b)b^*) - \right. \\
&- \nabla \cdot (bb\hat{k}(\nabla b^*)) - \nabla \cdot (\hat{k}(bb(\nabla b^*))) - 2\nabla \cdot ((\nabla b^*)b\hat{k}(b))\left. \right] + \\
&+ \frac{1}{4}\left[b^*\hat{k}((\nabla b) \cdot (\nabla b)) - \nabla \cdot ((\nabla b^*)\hat{k}(bb))\right] + \\
&+ \frac{1}{2}\left[(\nabla b) \cdot \hat{k}((\nabla b)b^*) - \nabla \cdot (b\hat{k}((\nabla b^*)b))\right] \quad (9)
\end{aligned}$$

Здесь оператор $\hat{\omega}_{\vec{k}}$ соответствует умножению на $\sqrt{g|\vec{k}|}$, а оператор \hat{k} — на $|\vec{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ в Фурье-пространстве.

Это уравнение эквивалентно уравнению Захарова только при переходе к одномерному случаю, в двумерной форме эквивалентности нет, оно приближённое по поперечной координате k_y . В качестве физической задачи для проверки адекватности описания динамики волн была рассмотрена задача о возмущённой стоячей волне $\lambda_0 = 20m.$, $\mu = |\vec{\nabla}\eta| \approx 0.26$ в канале с гладкими вертикальными стенками:

$$\frac{\partial \eta}{\partial x}\Big|_{x=0,L} = 0; \quad \eta_k = \sum_k a_k \cos(kx) \quad \rightarrow \quad b(-k_x, k_y) = b(k_x, k_y) \quad (10)$$

Условие (10) выполняется на каждом шаге интегрирования по времени.

На рисунке 6 показаны двумерные спектры $|\eta_{k_x, k_y}|^2$ в разные моменты времени. Спектр симметричен относительно оси ординаты, поскольку рассматриваются стоячие волны. Поэтому часть спектра с отрицательным k_x не показывается. Панель (a) соответствует одномерной стоячей волне с $k_{x0} = \frac{\pi}{10} \text{ м.}^{-1}$, $k_{y0} = 0$ и малым возмущением вокруг нее. В процессе эволюции спектр расширяется (панель (b)) и со временем становится почти изотропным (образование кольца) (панель (c)).

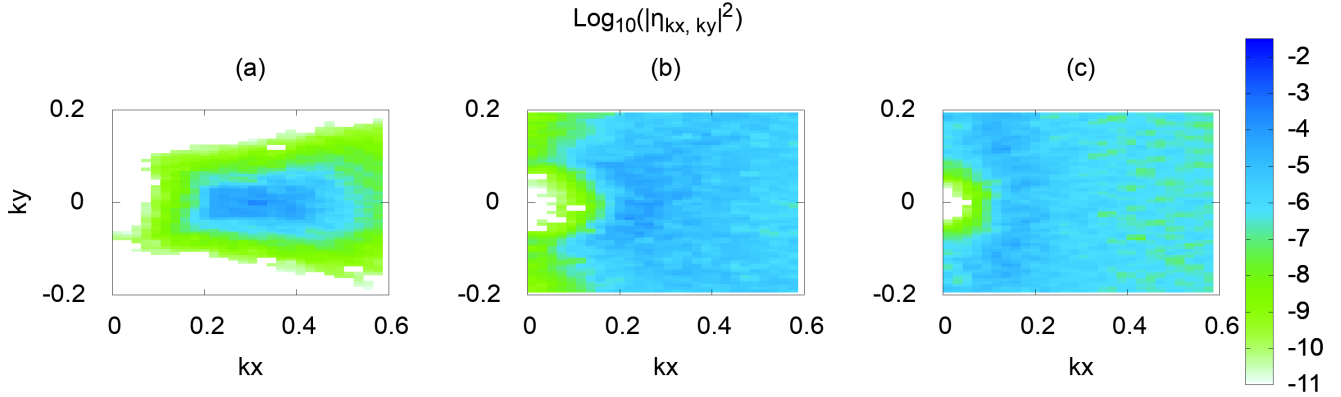


Рис. 6: Эволюция спектра $|\eta(k_x, k_y, t)|^2$ во времени в логарифмическом масштабе. Цвет показывает квадрат амплитуды гармоника. Панель (a) соответствует начальной поверхности в момент времени $t \approx 2$ мин. Панель (b) соответствует поверхности в момент времени $t \approx 1$ ч., а панель (c) соответствует поверхности в момент времени $t \approx 96$ ч.

На рисунке 7 показаны одномерные спектры $|\eta_{k_x}|^2$ при $k_y = 0$ (панель (a)) и зависимость полной энергии от времени (панель (b)). Видно, что со временем характерное волновое число смещается в длинноволновую область спектра, то есть волны в канале становятся длиннее вдоль оси x . Полная энергия системы постепенно уменьшается из-за затухания в коротковолновой области спектра. Видно, что за 96 часов энергия уменьшилась почти вдвое. Затухание необходимо для предотвращения образования очень крутых волн и их дальнейшего опрокидывания.

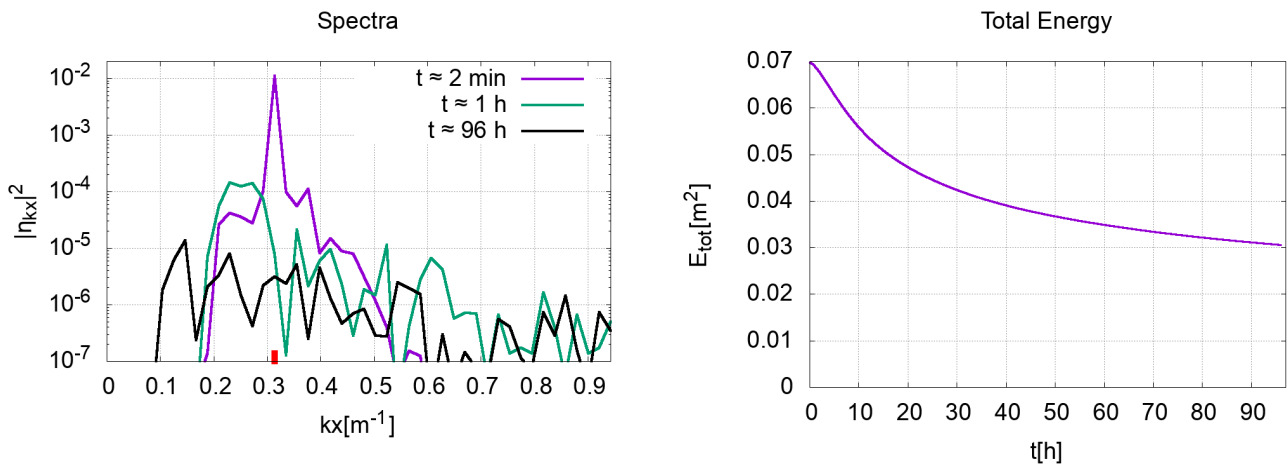


Рис. 7: На левом рисунке показана эволюция одномерного спектра $|\eta(k_x, k_y = 0, t)|^2$ в логарифмическом масштабе. Маленькая красная линия указывает на начальное характерное волновое число k_{x0} . Фиолетовая кривая соответствует начальному спектру в момент времени $t \approx 2$ мин., зеленая — спектру в момент времени $t \approx 1$ ч., а черная — спектру в момент времени $t \approx 96$ ч. На правом рисунке показана зависимость полной энергии от времени.

Эволюция поверхности представлена на рисунке 8. Изображения симметричны вокруг центральной вертикальной линии на расстоянии $x = 150$ м. Вначале волны выглядят почти од-

номерными (панель (a)), со временем волны начинают изгибаться (панель (b)) и через длительное время изотропизация спектра приводит к тому, что возникают волны, направленные во все стороны (панель (c)).

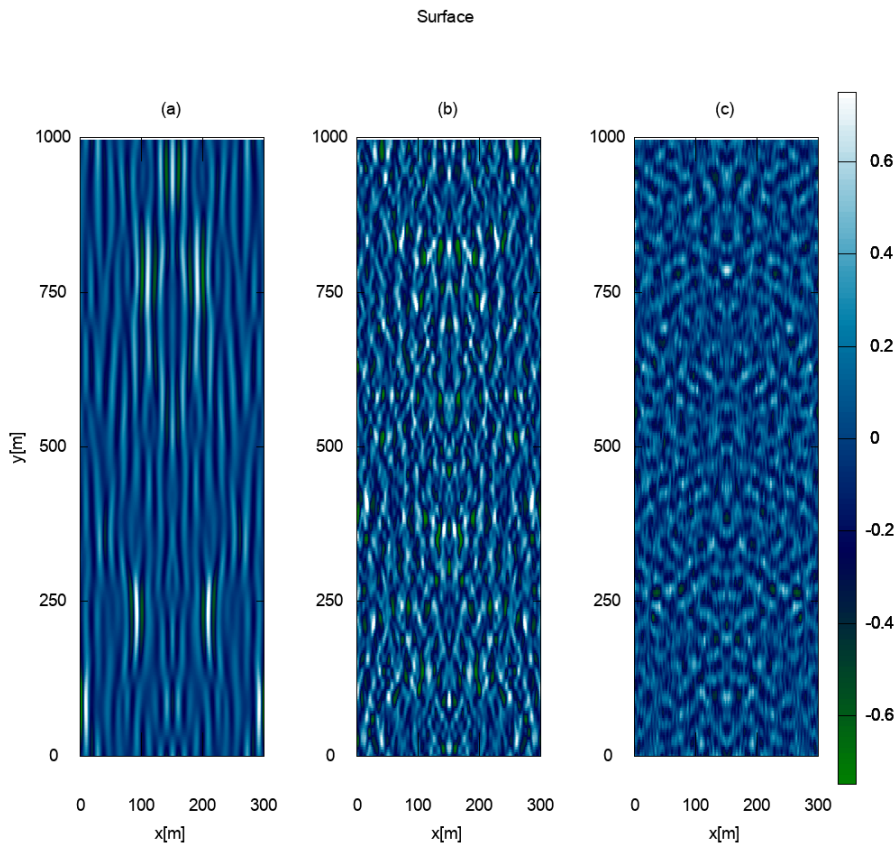


Рис. 8: Эволюция поверхности $\eta(x, y, t)$ во времени. Цветом показана амплитуда волн в метрах. Панель (a) соответствует начальной поверхности в момент времени $t \approx 2$ мин. Панель (b) соответствует поверхности в момент времени $t \approx 1$ ч., а панель (c) соответствует поверхности в момент времени $t \approx 96$ ч.

6. Эффект от использования кластера в достижении целей работы

Исследование солитонной турбулентности, а также численное получение и дальнейшее исследование би-солитонных структур в рамках суперкомпактного уравнения Дьяченко-Захарова, а также в рамках полной системы нелинейных уравнений в конформных переменных требовали решения большого количества однотипных задач с различными параметрами. Кроме того, для доказательства длительного устойчивого существования би-солитонных структур эксперименты требовали существенного времени расчёта даже в рамках одной задачи. В дополнение к этому, производился неоднократный расчёт двумерных задач, которые практически невозможно посчитать за разумное время без использования параллельных вычислений на нескольких потоках. Таким образом, совершенно очевидно, что использование вычислительных ресурсов ИВЦ НГУ играло определяющую роль в выполнении поставленных задач.

7. Перечень публикаций, содержащих результаты работы

1. Bi-Solitons on the Surface of a Deep Fluid: An Inverse Scattering Transform Perspective Based on Perturbation Theory / A.A. Gelash, S.V. Dremov, R.I. Mullyadzhyanov, D.I. Kachulin // Physical Review Letters. – 2024. – Т. 132. – №. 13. – С. 133403, **Q1**.

<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.132.133403>

doi: 10.1103/PhysRevLett.132.133403

(WoS:, Scopus: РИНЦ)

2. Two Models for 2D Deep Water Waves / S.V. Dremov, D.I. Kachulin, A.I. Dyachenko // Fluids. – 2022. – Т. 7. – №. 6. – С. 204, **Q2**.
<https://doi.org/10.3390/fluids7060204>
doi: 10.3390/fluids7060204
(WoS:, Scopus: РИНЦ)
3. Bound coherent structures propagating on the free surface of deep water / D.I. Kachulin, S.V. Dremov, A.I. Dyachenko // Fluids. – 2021. – Т. 6. – №. 3. – С. 115, **Q2**.
<https://doi.org/10.3390/fluids6030115>
doi: 10.3390/fluids6030115
(WoS:, Scopus: РИНЦ)
4. Multiple soliton interactions on the surface of deep water / D.I. Kachulin, A.I. Dyachenko, S.V. Dremov // Fluids. – 2020. – Т. 5. – №. 2. – С. 65., **Q2**.
<https://doi.org/10.3390/fluids5020065>
doi: 10.3390/fluids5020065
(WoS:, Scopus: РИНЦ)