

# Отчет о проделанной работе с использованием оборудования ИВЦ НГУ

## 1. Аннотация

Возникновение локализованных когерентных структур в нелинейных системах является вполне распространённым явлением наряду с волновыми коллапсами. В то время как отдельные стационарные структуры (солитоны) широко распространены в нелинейных волновых моделях, долгоживущие многосолитонные комплексы встречаются не так часто и поэтому привлекают особое внимание и представляют большой интерес для экспериментальных исследований. Подобные структуры образуются и взаимодействуют в проводниках, на вихревых нитях, в молекулах ДНК и различных белковых соединениях, оптоволокне и др. Недавно, возникновение таких структур было обнаружено в уравнениях для волн на глубокой воде [Kachulin et al., 2020]. Текущие исследования направлены на получение и последующее изучение таких би-солитонных структур в рамках суперкомпактного уравнения Дьяченко-Захарова, а также точной системе нелинейных уравнений в конформных переменных.

## 2. Тема работы

Би-солитонные структуры в рамках уравнений для волн на глубокой воде.

## 3. Состав коллектива

Качулин Дмитрий Игоревич, к.ф.-м.н., с.н.с. лаборатории нелинейных волновых процессов ФФ НГУ до 2020 г., н.с. лаборатории нелинейной фотоники ФФ НГУ с 2021 г.

Дремов Сергей Вячеславович, аспирант НГУ до 2022 г., инженер Лаборатории нелинейных волновых процессов ФФ НГУ до 2022 г. С 2023 г. стажёр-исследователь лаборатории интегрируемых систем и турбулентности центра перспективных исследований Сколковского института науки и технологий.

Дьяченко Александр Иванович, д.ф.-м.н., в.н.с. Института теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН.

## 4. Информация о грантах

РНФ, Конкурс 2019 года по мероприятию «Проведение исследований научными лабораториями мирового уровня в рамках реализации приоритетов научно-технологического развития Российской Федерации» Президентской программы исследовательских проектов, реализуемых ведущими учеными, в том числе молодыми учеными. Грант № 19-72-30028 «Турбулентность и когерентные структуры в интегрируемых и неинтегрируемых системах». Руководитель – В.Е. Захаров (С 2023 г. – Е.А. Кузнецов)

РФФИ, «Аспиранты», Конкурс на лучшие проекты фундаментальных научных исследований, выполняемые молодыми учеными, обучающимися в аспирантуре. Грант № 20-31-90093 «Когерентные структуры и сейши в слабонелинейных моделях для поверхностных волн», 2020г. Руководитель – Д.И. Качулин.

## 5. Научное содержание работы

### 5.1. Постановка задачи

Реализовать численный алгоритм для нахождения би-солитонных структур в рамках суперкомпактного уравнения Дьяченко-Захарова, а также в рамках точной системы нелинейных уравнений в конформных переменных. В качестве начальных условий для нахождения би-солитонных структур использовать известные точные би-солитонные решения нелинейного уравнения Шрёдингера (НУШ). Кроме того, в качестве альтернативы начальным условиям в виде би-солитона НУШ, использовать два одиночных бризера, найденных методом Петвиашвили и помещённых в одну точку пространственной области. Численно исследовать динамику структур при различных определяющих параметрах — крутизне и соотношении амплитуд.

## 5.2. Современное состояние проблемы

Волновая турбулентность и взаимодействие в ней когерентных структур, например солитонов, а также образование из них связанных состояний является необъятным направлением современной нелинейной динамики. В большинстве случаев при исследовании солитонов и их связанных состояний в нелинейных уравнениях фундаментом для изучения являются интегрируемые уравнения с известными аналитическими решениями. В случае исследования динамики и взаимодействия гравитационных волн на поверхности идеальной несжимаемой глубокой жидкости единственной известной интегрируемой моделью является нелинейное уравнение Шрёдингера (НУШ). Однако НУШ выведено в предположении узости спектральной ширины волнового пакета, а потому содержит в себе ограничения, не позволяющие корректно описывать некоторые нелинейные эффекты, к примеру, образование волн экстремальной амплитуды и др. В связи с этим требуется использование более точных моделей.

Одной из таких моделей является суперкомпактное уравнение Дьяченко-Захарова, рассматривающее распространение однонаправленных волн. Кроме того, имеется полная система нелинейных уравнений, записанная в конформных переменных, позволяющая точно решать исходную задачу. В совокупности суперкомпактное и точные уравнения представляют оптимальные инструменты для исследования солитонной турбулентности в рамках гидродинамики идеальной несжимаемой жидкости со свободной поверхностью.

Недавно, в рамках суперкомпактного уравнения были изучены многократные столкновения бризеров (солитонов) [1]. В ходе исследований было обнаружено, что бризеры способны связываться в одну периодически осциллирующую структуру, напоминающую известное би-солитонное решение НУШ. Это открытие наводило на мысль, что в суперкомпактном уравнении, а может быть, и в точных уравнениях тоже существуют аналоги таких би-солитонов.

Основная сложность заключается в методе нахождения решений би-солитонного типа в рассматриваемых уравнениях. Получить какие-либо аналитические выражения для таких решений не представляется возможным, поэтому, по-видимому, искать такие решения на данный момент можно только численно. В случае суперкомпактного уравнения решение в виде одиночного бризера можно получить точно с помощью метода Петвиашвили, однако его применимость ограничена нахождением одиночных стационарных решений нелинейных волновых уравнений, поэтому метод не подходит для поиска периодического по времени решения в виде би-солитона. Для точных уравнений на данный момент вообще неизвестны методы, позволяющие найти какие-либо решения.

Тем не менее, попытаться численно найти би-солитонные решения можно с помощью алгоритма, описанного в работе [2], где был впервые получен одиночный бризер в рамках точных уравнений. Для нахождения таких решений авторами был разработан специальный численный алгоритм, основанный на подстановке точных солитонных решений НУШ в качестве начальных условий в полную систему нелинейных уравнений с последующей фильтрацией излученных некогерентных волн, возникающих в процессе эволюции. В результате авторам статьи удалось доказать существование узких бризеров большой крутизны, распространяющихся без потерь энергии на протяжении сотен периодов характерных волн. Данный результат стал отправной точкой для последующего экспериментального наблюдения и исследования таких объектов на поверхности глубокой воды. Возможно, что нахождение би-солитонных решений в суперкомпактном и точных уравнениях также сможет стать стимулом для дальнейших исследований.

1. Kachulin D., Dremov S., Dyachenko A. Bound coherent structures propagating on the free surface of deep water // *Fluids*. – 2021. – Т. 6. – №. 3. – С. 115.
2. Dyachenko A. I., Zakharov V. E. On the formation of freak waves on the surface of deep water // *JETP letters*. – 2008. – Т. 88. – С. 307-311.

## 5.3. Подробное описание работы, включая используемые алгоритмы

Одним из наиболее распространённых методов исследования динамики гравитационных волн на глубокой воде является прямое численное моделирование. Нелинейное уравнение Шрёдингера, приближённое суперкомпактное уравнение Дьяченко-Захарова и точная система уравнений в конформных переменных в совокупности представляют оптимальным и эффективным инструментом для исследований. Результаты, полученные первоначально в рамках простого с вычислительной точки зрения суперкомпактного уравнения, могут быть дополнительно проверены в точных уравнениях.

Суперкомпактное уравнение содержит нелокальные слагаемые в виде оператора  $\hat{k}$ , который может быть легко вычислен только в Фурье-пространстве, поэтому в работе рассматривались периодические граничные условия. Численное решение задачи Коши с периодическими граничными условиями производилось с помощью псевдо-спектрального метода Фурье с использованием быстрых преобразований Фурье библиотеки FFTW. Умножение сеточных функций выполнялось в  $x$ -пространстве, а вычисление производных и нелокальных слагаемых — в Фурье-пространстве. Для интегрирования по времени использовался метод Рунге-Кутты 4 порядка точности. Корректность результатов проверялась сохранением интегралов движения в процессе эволюции.

Точные уравнения также решались с помощью псевдо-спектрального метода Фурье с интегрированием по времени методом Рунге-Кутты 4 порядка точности. При конформном преобразовании узлы сетки в конформных переменных не совпадают с узлами исходной сетки, в связи с чем необходимо применять интерполяцию для нахождения значений функции (поверхности и потенциала) на сетке в конформных переменных. Для этого использовался известный ряд Фурье данной функции, по которому вычислялось значение функции в произвольной точке в  $x$ -пространстве. Точность интерполяции функции контролировалась с помощью метода простых итераций.

Для численного нахождения би-солитонного решения в суперкомпактном и точных уравнениях использовался численный алгоритм, аналогичный использованному в работе [Dyachenko et al., 2008] (см. выше). В качестве начальных условий задавалось би-солитонное решение НУШ. Излучение некогерентных волн подавлялось с помощью включения в расчётах механизма затухания, сосредоточенного на краях расчетной области. Альтернативой начальным условиям в виде би-солитонов НУШ выступало задание нескольких одиночных бризеров, расположенных одной точке пространственной области. В этом случае бризеры находились с помощью метода Петвиашвили.

Основными определяющими параметрами являются крутизна  $\mu$  и соотношение амплитуд солитонов  $\kappa$ , причём  $\kappa$  определяется только в начальный момент времени. Остальные параметры би-солитона НУШ выбирались следующими: характерное безразмерное волновое число  $\tilde{k}_0 = 100$ , в размерных единицах  $k_0 = \frac{2\pi}{L}\tilde{k}_0 \approx 0.0628 \text{ м.}^{-1}$ , в таком случае характерная частота  $\omega_0 \approx 0.785 \text{ с}^{-1}$ , а групповая скорость  $V_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k_0}} \approx 6.25 \text{ м/с}$ .

Будучи не являясь решением рассматриваемых уравнений, в процессе расчета временной эволюции исходный би-солитон начинает излучать некогерентные волны. Для подавления таких волн использовалась процедура затухания, для чего в правую часть уравнений добавлялось слагаемое следующего вида:

$$\frac{\partial c(x, t)}{\partial t} = \dots - \gamma f(x)c(x, t) \quad (1)$$

$$f(x) = \cos^6\left(\frac{\pi x}{L}\right), L = 10 \text{ км.} - \text{длина периодической области} \quad (2)$$

Выбранная функция  $f(x)$  и коэффициент  $\gamma$  концентрирует затухание на краях расчётной области, не затрагивая саму структуру, которая всегда находится в центре области, так как вычисления проводятся в системе отчёта, двигающейся с групповой скоростью начального би-солитона  $V_0 \approx 6.25 \text{ м/с}$ . В процессе образования некогерентных волн групповая скорость оставшейся когерентной структуры изменяется. Поэтому, для того чтобы она всегда оставалась в центре, скорость системы отсчета постоянно корректировалась. Корректировочная добавка к скорости рассчитывалась по смещению максимума структуры за фиксированный промежуток времени с осреднением результата. Коэффициент  $\gamma$  не должен выбираться слишком большим, чтобы избежать численной неустойчивости. С другой стороны, он не должен быть слишком маленьким, иначе возникающее излучение не будет затухать. В данных экспериментах  $\gamma$  выбиралось в диапазоне  $10^{-2} - 10^{-3}$ .

#### 5.4. Полученные результаты

На рисунках 1 показаны профили получившихся структур при использовании в качестве начальных условий би-солитоны НУШ с различной крутизной. Профили построены через некоторое время после отключения затухания, сам момент времени не имеет особого значения, так как данные структуры являются периодическими по времени. Разумеется, для корректного сравнения между собой профили строились в одной фазе. Изначальная крутизна  $\mu_i$  составляла 0.1, 0.2, 0.3 и 0.4, а результирующая крутизна  $\mu_f$  достигала  $\approx 0.09, 0.18, 0.25$  и  $0.35$  соответственно. Сам процесс затухания длился  $3 \cdot 10^5$  секунд, продолжительность выбиралась таким образом, чтобы контролировать уровень излучения в диапазоне  $10^{-2} - 10^{-3}$  или  $0,5 - 1\%$  от максимальной амплитуды структуры.

Коэффициент затухания  $\gamma$  был равен  $10^{-3}$ . Как видно из рисунков, влияние коэффициента амплитуды  $\kappa$  падает по мере увеличения исходной крутизны. При исходной крутизне  $\mu_i \approx 0.4$  профили получившихся структур практически не отличаются друг от друга, поэтому они не показаны на рисунке. Все полученные структуры стабильно существовали в течение  $10^6$  с. после отключения затухания. Это эквивалентно сотням тысяч характерных периодов волн:  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \approx 10$  с. Также следует отметить, что во всех полученных структурах два нуля функции  $|c(x)|$  могут встречаться только поочередно, но не одновременно, как в точном би-солитоне НУШ.

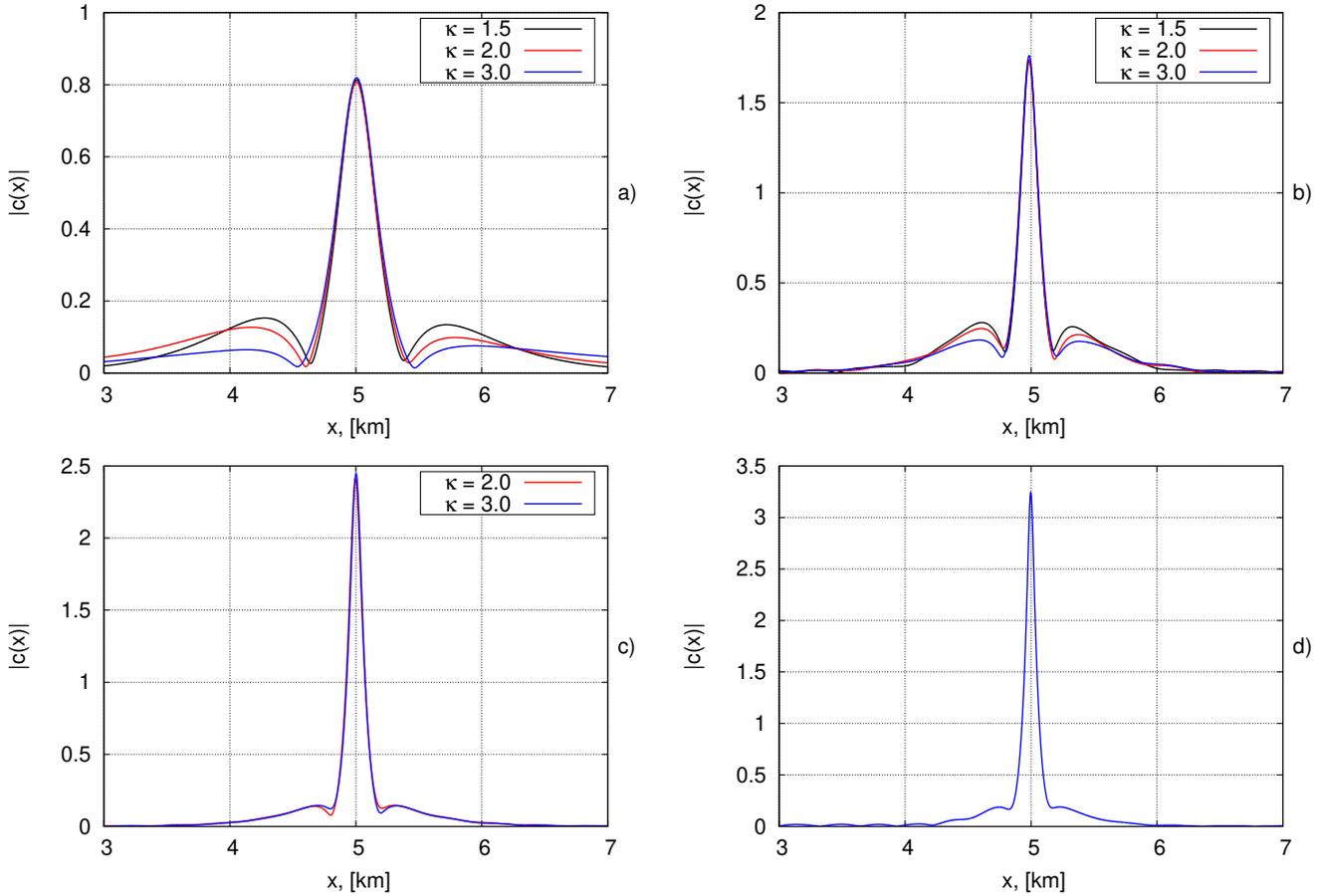


Рис. 1: Профили  $|c(x)|$  для связанных структур, получившихся при использовании в качестве начальных условий би-солитонов НУШ с различными  $\kappa$  и  $\mu_i = 0.1$  (a), 0.2 (b), 0.3 (c) и 0.4 (d). По мере увеличения  $\mu_i$  влияние  $\kappa$  становится всё менее значительным. Диапазон по  $x$  выбран от 3 км. до 7 км. для лучшего разрешения профилей.

Более наглядно общая динамика и процесс получения би-солитонной структуры в рамках суперкомпактного уравнения представлены в следующем фильме:  
<http://kachulin.itp.ac.ru/mdpi-2021-films/SCEq-mu025-l.mp4>.

Подробная динамика би-солитонной структуры в течение одного периода осцилляций представлена в фильме по следующей ссылке:  
<http://kachulin.itp.ac.ru/mdpi-2021-films/SCEq-mu025-s.mp4>.

Интересной особенностью при использовании би-солитона НУШ в качестве начального условия является то, что существует диапазон параметров  $\mu$  и  $\kappa$ , при которых получение связанной структуры становится невозможным. Вместо этого происходит распад связанного состояния и расщепление би-солитона на два отдельных солитона (рис. 2). Явление проявляется при малых отношениях амплитуд ( $\kappa < 1.25$ ) в зависимости от крутизны, но при  $\kappa = 1.1$ , или другими словами, очень близких амплитудах каждого из солитонов, би-солитон расщепляется при любом значении начальной крутизны  $\mu_i$ .

Дополнительно пример распада би-солитонной структуры можно посмотреть по этой ссылке:  
<http://kachulin.itp.ac.ru/mdpi-2021-films/Bi-Sol-split.mp4>.

На рисунке 3 (a) показана структура, полученная из исходного би-солитона НУШ с начальной крутизной  $\mu_i = 0.2$  и  $\kappa = 1.5$  в рамках суперкомпактного уравнения. Конечная крутизна получен-

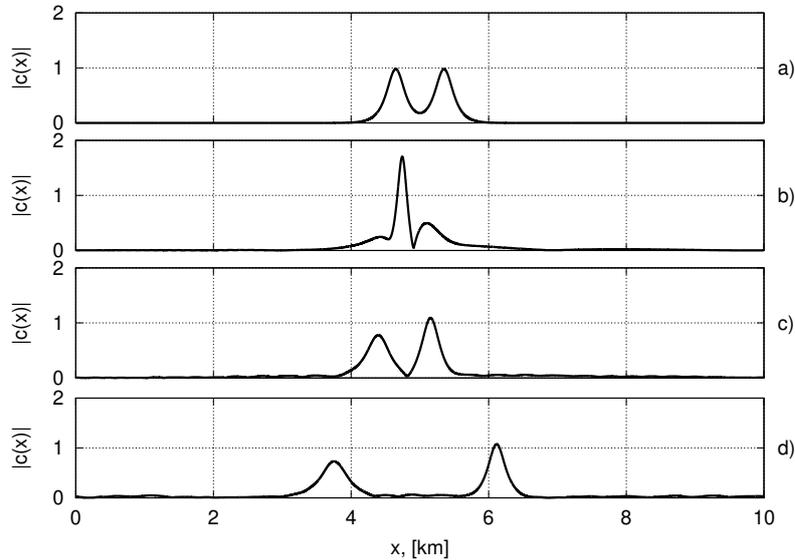


Рис. 2: Процесс распада связанного би-солитона на два отдельных солитона для случая  $\mu_i = 0.2$  и  $\kappa = 1.1$ : начальное состояние би-солитона (а), взаимодействие солитонов (б), начало процесса распада (с), распад на два отдельных солитона (д).

ной структуры  $\mu_f$  достигает  $\approx 0.175$ . Структура стабильно распространялась в течение  $2 \cdot 10^6$  с. без потери энергии. После завершения расчетов для конечного волнового поля были использованы канонические преобразования от переменной  $c(x)$  к переменным  $\eta(x)$  и  $\psi(x)$ . Далее, были получены переменные  $R$  и  $V$ , и расчёт продолжился в рамках точных  $RV$ -уравнений. В них структура также стабильно распространялась в течение  $1 \cdot 10^6$  секунд, что показано на рисунке 3 (б).

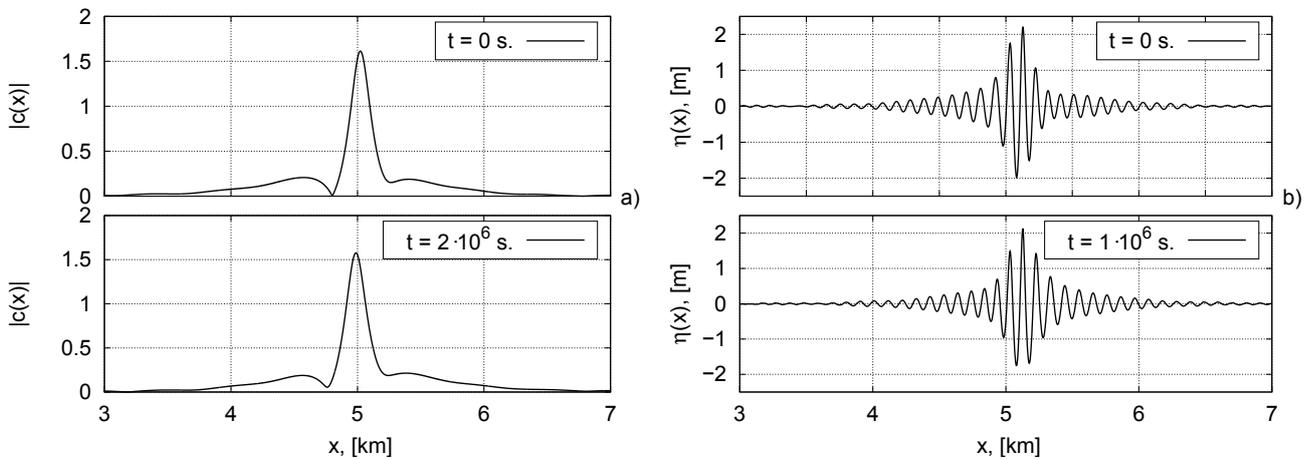


Рис. 3: Эволюция во времени  $|c(x)|$  в суперкомпактном уравнении (а) и  $\eta(x)$  в точных  $RV$ -уравнениях (б),  $\mu_i = 0.2$ ,  $\mu_f \approx 0.175$ , и  $\kappa = 1.5$

Связанная структура также может быть получена в точных  $RV$ -уравнениях и без ”промежуточной” стадии эволюции в суперкомпактном уравнении. Достаточно использовать в качестве начальных условий би-солитоны НУШ. Можно также задавать начальное волновое поле в виде двух одиночных бризеров в суперкомпактном уравнении с дальнейшим его преобразованием к точным уравнениям как было описано выше. Каких-либо принципиальных различий при использовании перечисленных вариантов начальных условий обнаружено не было. На рисунке 4 показан пример связанной структуры с конечной крутизной  $\mu_f \approx 0.25$ . Она была получена с помощью би-солитона НУШ с начальной крутизной  $\mu_i = 0.3$  и  $\kappa = 1.5$ , использованного в качестве начального условия. На панели (а) показан профиль поверхности  $\eta(x)$ , а на панели (б) показан квадрат поверхности  $\eta^2(x)$  в логарифмическом масштабе для контроля уровня излучения. Как и в других случаях, структура существует стабильно и не теряет энергию. Если начальная крутизна  $\mu_i$  превышает 0.5, то это всегда приводит к распаду связанного состояния, упомянутого ранее, независимо от начальных условий и выбора  $\kappa$ .

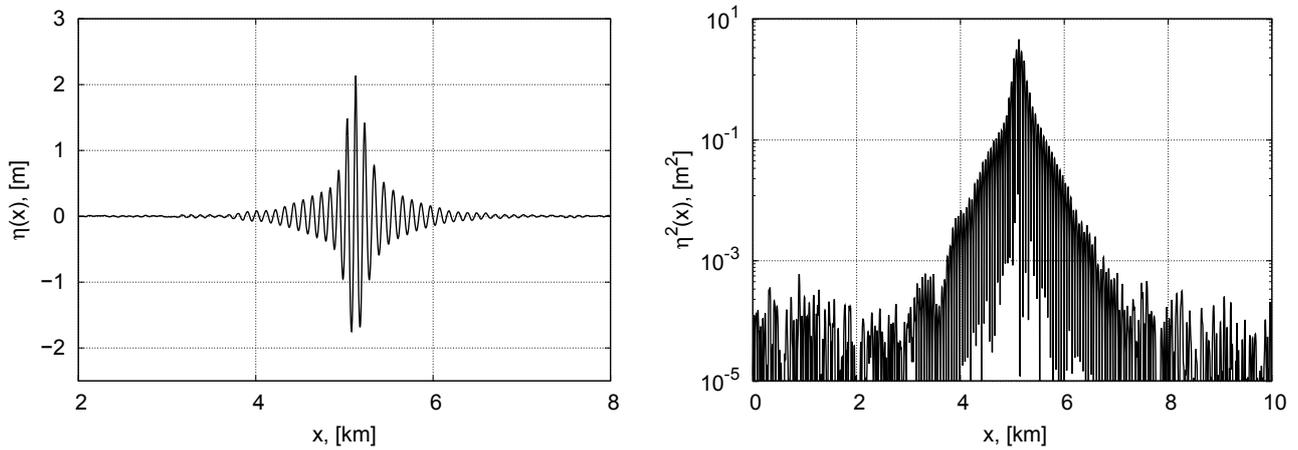


Рис. 4: Профили  $\eta(x)$  (a) и  $\eta^2(x)$  в логарифмическом масштабе (b) для связанной структуры с конечной крутизной  $\mu_{fin} \approx 0.25$ , полученной в точных  $RV$ -уравнениях.

## 6. Эффект от использования кластера в достижении целей работы

Численное получение и дальнейшее исследование би-солитонных структур в рамках суперкомпактного уравнения Дьяченко-Захарова, а также в рамках точной системы нелинейных уравнений в конформных переменных требовали решения большого количества однотипных задач с различными параметрами. Кроме того, для доказательства длительного устойчивого существования би-солитонных структур эксперименты требовали существенного времени расчёта даже в рамках одной задачи. В связи с этим, использование вычислительных ресурсов ИВЦ НГУ играло определяющую роль в выполнении поставленных задач.

## 7. Перечень публикаций, содержащих результаты работы

1. Kachulin D., Dremov S., Dyachenko A. Bound coherent structures propagating on the free surface of deep water // *Fluids*. – 2021. – Т. 6. – №. 3. – С. 115.

<https://doi.org/10.3390/fluids6030115>

doi: 10.3390/fluids6030115

(WoS:, Scopus: РИНЦ)