

Исследование разностных схем для нелинейного уравнения Шрёдингера

П.А. КАРПИК¹

¹Новосибирский государственный университет, Россия

1 июня 2019 г.

Аннотация

В работе исследуется сравнительная эффективность различных численных методов решения нелинейного уравнения Шрёдингера (НУШ). В дополнение к таким общеизвестным методам, как явный и неявный методы, схема Кранка – Николсон, а также метод Фурье разделения по физическим факторам, рассматривается ряд новых компактных разностных схем. Проводятся анализ и сравнение методов в двух различных метриках. Для расчетов, помимо стандартного в подобного рода исследованиях аналитического решения в виде солитона, были выбраны сигналы, используемые для передачи информации по оптическому волокну, с форматом модуляции 16QAM.

Введение

Нелинейное уравнение Шрёдингера (НУШ) широко используется для математического моделирования распространения оптического импульса по световоду. В наиболее известной форме уравнение представляется следующим образом [1]:

$$iA_z = \frac{\beta_2}{2} A_{tt} - \gamma |A|^2 A, \quad (1)$$

где $A \in \mathbb{C}$ - огибающая импульса, параметры β_2 (дисперсия групповых скоростей) и $\gamma > 0$ (показатель нелинейности) определяются моделируемой системой. Для удобства расчетов уравнение (1) записывается в безразмерном виде

$$iu_\zeta = \frac{\text{sgn}(\beta_2)}{2} u_{\tau\tau} - N^2 |u|^2 u \quad (2)$$

с помощью замены переменных: $u = \frac{A}{\sqrt{P_0}}$, $\zeta = \frac{z}{L_D}$, $\tau = \frac{T}{T_0}$. Здесь $L_D = \frac{T_0^2}{|\beta_2|}$ - показатель дисперсионной длины, P_0 - пиковая мощность, параметр N^2 определяется как отношение дисперсионной к нелинейной длине: $N^2 = \frac{L_D}{L_{NL}}$. В статье рассматривается случай аномальной дисперсии $\text{sgn}(\beta_2) = -1$. С помощью еще одного преобразования $U = Nu$ (2) приводится к виду:

$$iU_\zeta = -\frac{1}{2} U_{\tau\tau} - |U|^2 U. \quad (3)$$

Используя данную форму уравнения (1), В.Е. Захаров и А.Б. Шабат получили класс точных аналитических решений, именуемых солитонами [1]. Одно из таких решений, а именно фундаментальный солитон

$$U(\zeta, \tau) = e^{i\frac{\zeta}{2}} \text{sech}(\tau), \quad (4)$$

будет изучено в ходе дальнейшего изложения.

Для моделирования передачи информации по волокну применяется в основном Split Step Fourier Method (SSFM) - Фурье-метод расщепления по физическим факторам, он же используется как стандартный в большинстве пакетов программ. SSFM имеет хорошую точность, но с алгоритмической сложностью на временном слое $O(N \log N)$. В связи с этим интерес представляет изучение вопроса о применимости конечно-разностных, в частности компактных, схем для расчета реальных оптоволоконных линий связи, так как из-за экономической реализации и возможности распараллеливания время выполнения программы при большом числе точек по времени для таких схем будет значительно ниже чем у SSFM.

1 Теоретическое исследование методов

Приведем список обозначений, принятых для упрощения хода изложения:

1. Оператор $\Delta_+ u^n = \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta\zeta}$;
2. $\Delta u^n = \frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\Delta\zeta}$;
3. $\Lambda u_j = \frac{u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}}{(\Delta\tau)^2}$;
4. \mathcal{F} , \mathcal{F}^{-1} - прямое и обратное дискретные преобразования Фурье;
5. $f_j^n = -N^2 |u_j^n|^2 u_j^n$.

В ходе первого этапа работы было выбрано несколько методов, проведен анализ устойчивости соответствующих схем для линейного уравнения

$$iu_\zeta = -\frac{1}{2}u_{\tau\tau}, \quad (5)$$

также была подтверждена теоретическая оценка точности.

- 1) *Явная схема* (схема Рундсона) [2]:

$$i\Delta u_j^n = -\frac{1}{2}\Lambda u_j^n + f_j^n \quad (6)$$

условно устойчива ($\Delta\zeta/(\Delta\tau)^2 \leq 1/4$, аппроксимирует точное решение с погрешностью $O((\Delta\zeta)^2 + (\Delta\tau)^2)$).

- 2) *Неявная схема* [2]:

$$i\Delta_+ u_j^n = -\frac{1}{4}\Lambda(u_j^n + u_j^{n+1}) + \frac{f_{j-1}^n + f_{j+1}^n}{2} \quad (7)$$

абсолютно устойчива, аппроксимирует с точностью $O(\Delta\zeta + (\Delta\tau)^2)$.

- 3) *SSFM* (Split Step Fourier Method) [2]:

$$u(\zeta^n, \tau_j) = e^{-\frac{1}{2}\Delta\zeta N} \left(\prod_{i=1}^n e^{\Delta\zeta N} \cdot e^{\Delta\zeta D} \right) e^{\frac{1}{2}\Delta\zeta N} u(0, \tau_j) \quad (8)$$

, где $N = iN^2 |u_j^n|^2$, $D = i\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}$ - может быть вычислен с помощью перехода в пространство Фурье ($\mathcal{F}^{-1}(e^{i\frac{1}{2}\Delta\zeta \cdot i^2 \omega^2}) \mathcal{F}u(\zeta, \cdot)$).

Метод абсолютно устойчив, аппроксимирует с точностью $O((\Delta\zeta)^2 + (\Delta\tau)^\infty)$;

- 4) *Схема Кранка-Николсон* [2]:

$$i\Delta_+ u_j^n = -\frac{1}{4}\Lambda(u_j^n + u_j^{n+1}) + \frac{f_j^n + f_j^{n+1}}{2} \quad (9)$$

абсолютно устойчива, аппроксимирует с точностью $O((\Delta\zeta)^2 + (\Delta\tau)^2)$.

5) *Схема восьмого порядка точности* [3] абсолютно устойчива, в том числе доказана теоретическая устойчивость для нелинейной схемы, погрешность составляет $O(h^2 + \tau^8)$.

6) *Схема Федорука М.П. и Паасонена В.И.* (итерационная) [4]:

$$i\Delta_+ u_j^n = -\frac{1}{2}\Lambda(\alpha u_j^{n+1} + (1-\alpha)u_j^n) + \left(\frac{f_j^{n+1} + f_j^n}{2} + \frac{(\Delta\tau)^2}{12}\Lambda f_j^n\right), \quad (10)$$

где $\alpha = 1/2 + i(\Delta\tau)^2/(6\Delta\zeta) + c\Delta\zeta$, ($c > 0$).

Схема абсолютно устойчива, аппроксимирует с точностью $O((\Delta\zeta)^2 + (\Delta\tau)^4)$.

7) *Схема Федорука М.П. и Паасонена В.И.* [5]:

$$i\Delta u_j^n = -\frac{1}{2}\Lambda(\alpha u_j^{n+1} + (1-\alpha)u_j^{n-1}) + \left(f_j^n + \frac{(\Delta\tau)^2}{12}\Lambda f_j^n\right), \quad (11)$$

где $\alpha = 1/2 + i(\Delta\tau)^2/(12\Delta\zeta) + 2c\Delta\zeta$, ($c > 0$)

Схема абсолютно устойчива, аппроксимирует с точностью $O((\Delta\zeta)^2 + (\Delta\tau)^4)$;

Далее методы проверялись на фундаментальном солитоне (4); полученные результаты о порядке сходимости согласуются с теоретическими оценками точности и расчетами, проведенными в работах [2-5].

2 Сравнение методов на фундаментальном солитоне

Оператор уравнения (3) аппроксимируется спектральным и конечно-разностными операторами, список которых приведен в §1. Для исследования отклонения численного решения от точного вводится критерий, определяемый количеством точек по пространству и времени и затраченным временем работы при заданной точности. Схемы рассматриваются при увеличении количества узлов по эволюционной переменной в два раза - это обусловлено тем, что в пакетах моделирования линий связи для количества точек по пространству используется степень двойки.

Для проведения тестов был разработан комплекс программ, оптимизированный с использованием библиотеки Intel MKL, что позволило ускорить время работы исследуемых методов. Схемы, в которых применяется метод прогонки, были реализованы с помощью библиотечных функций факторизации матриц и решения трехдиагональной системы уравнений. Также использовались быстрое обратное и прямое преобразования Фурье, во всех программах применялись процедуры умножения массивов на скаляр и их копирования.

Расчеты проводились при фиксированных $L = 5$ длине по ζ и ширине расчетной области, равной 60, время выбиралось среднее медианное из 11 запусков. Результаты расчетов приведены ниже в таблицах 1-3. Указаны значения параметров, при которых впервые

был преодолен порог требуемой точности ϵ ($\text{Error} \leq \epsilon$, где $\text{Error} = \sqrt{\frac{1}{N_t} \sum_{i=1}^{N_t} |(u)_i - u_i|^2}$), для

погрешностей $\epsilon = 0.1$, $\epsilon = 0.01$ и $\epsilon = 0.001$ соответственно:

* N_z - количество точек по пространству; N_t - количество точек по временной оси; Error - среднеквадратичное отклонение численного решения от солитона (4); время измеряется в секундах.

Методы, явно уступающие остальным в точности и времени расчета, были исключены из дальнейшего рассмотрения - это явная схема, которая к тому же имеет условную устойчивость $\Delta\zeta/(\Delta\tau)^2 \leq 1/4$, неявная схема и схема Кранка-Николсон. Также из двух схем Федорука-Паасонена была выбрана безытерационная, так как время работы данной схемы в разы меньше, чем схемы с итерациями; более того, скорость сходимости итераций, вообще говоря, сильно зависит от начального распределения.

Таблица 1

Метод	Nt	Nz	Error, $\epsilon = 0.1$	Время
Явная схема	64	10	0.0986953	0.000014
Неявная схема	128	20	0.0647345	0.00014
SSFM	64	5	0.06134645	0.00008
Схема Федорука-Паасонен	64	20	0.0355025	0.000258
Схема Федорука-Паасонена(безытерационная)	64	20	0.001079445	0.000104
Схема Кранка-Николсон	64	30	0.0658826	0.000397
Схема восьмого порядка точности	64	20	0.02711028	0.000589

Таблица 2

Метод	Nt	Nz	Error, $\epsilon = 0.01$	Время
Явная схема	256	200	0.005570154	0.001906
Неявная схема	512	200	0.009675473	0.008981
SSFM	128	20	0.005315288	0.000232
Схема Федорука-Паасонена	64	100	0.00990844	0.002816
Схема Федорука-Паасонена(безытерационная)	64	20	0.001079445	0.000104
Схема Кранка-Николсон	256	70	0.009013531	0.003661
Схема восьмого порядка точности	128	50	0.007142356	0.0045666

Таблица 3

Метод	Nt	Nz	Error, $\epsilon = 0.001$	Время
Явная схема	1024	3000	0.0003303607	0.114563
Неявная схема	1024	1280	0.0008766334	0.072156
SSFM	128	50	0.000869354	0.000758
Схема Федорука-Паасонена	128	80	0.0005301937	0.003038
Схема Федорука-Паасонена(безытерационная)	256	70	0.0008798631	0.001964
Схема Кранка-Николсон	1024	80	0.0001677268	0.014744
Схема восьмого порядка точности	128	80	0.0001648679	0.007146

3 Сравнение по BER фактору на сигналах WDM

WDM - Wavelength Division Multiplexing (спектральное уплотнение каналов)- технология уплотнения, позволяющая за счет разнесения начальных импульсов на разные частоты повысить пропускную способность линии связи. В качестве начального импульса был выбран приподнятый косинус с параметром $\beta = 0.2$:

$$h(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right) \frac{\cos\left(\frac{\pi\beta t}{T_s}\right)}{1 - \frac{4\beta^2 t^2}{T_s^2}}, \quad (12)$$

параметр β определяет в том числе ширину спектра импульса, в связи с чем межканальное расстояние для генерируемой последовательности было выбрано равным 1.3.

Перечень характерных величин для волокна представлен ниже (для расчета линий связи используется средняя мощность, обозначенная через A_0^2):

Таблица 4

Параметр	Значение
A_0^2	0.1 ·
T_0	10 ·
β_2	21.7 · $\frac{2}{\cdot}$
γ	1.3 · $\frac{1}{\cdot}$
R_s	32 ·

Параметр P_0 нормировки импульса подбирается таким образом, чтобы средняя мощность исходного сигнала A равнялась заданной величине, т.е.

$$\frac{\|A\|_{L^2}^2}{NT_s} := \frac{\int_{-\frac{N \cdot T_s}{2}}^{\frac{N \cdot T_s}{2}} |A|^2 d\tau}{NT_s} = 0.1 \cdot, \quad (13)$$

где N - количество WDM символов, а T_s - длительность одного символа в системе связи.

BER - bit error ratio - отношение неправильно принятых битов к количеству отправленных. Для подсчета BER компенсируется дисперсия, а после выполняется демодуляция сигнала, в результате определяется последовательность битов на приемнике.

Для сравнения по BER был построен сигнал из 2^{13} WDM символов с пятью каналами и форматом модуляции 16QAM, часто используемой при передаче данных, рассмотренный в расчетной области равной 2^{14} . Сигнал передавался на расстояние 1000 километров.

В рассмотрение добавлена схема Федорука-Паасонена с периодическими граничными условиями с целью сравнения нулевых и периодических условий.

Далее приведены результаты расчета BER на различных сетках в виде графиков:

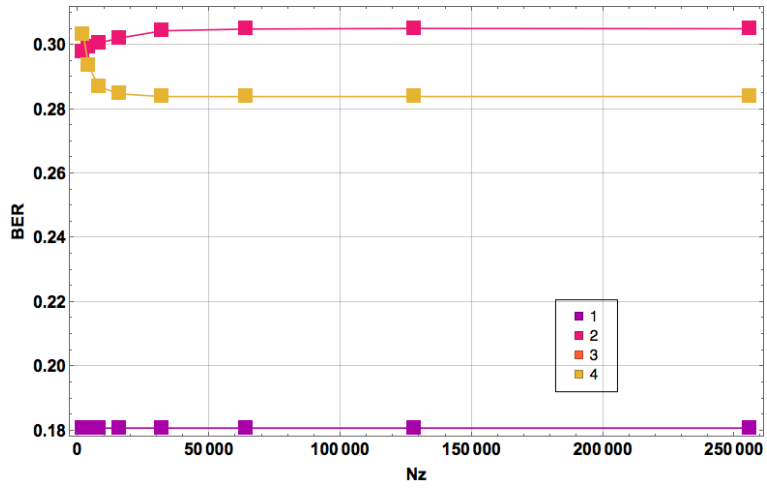


Рис. 1: Расчет BER при фиксированном количестве точек по времени на символ $\text{Incr} = 4$

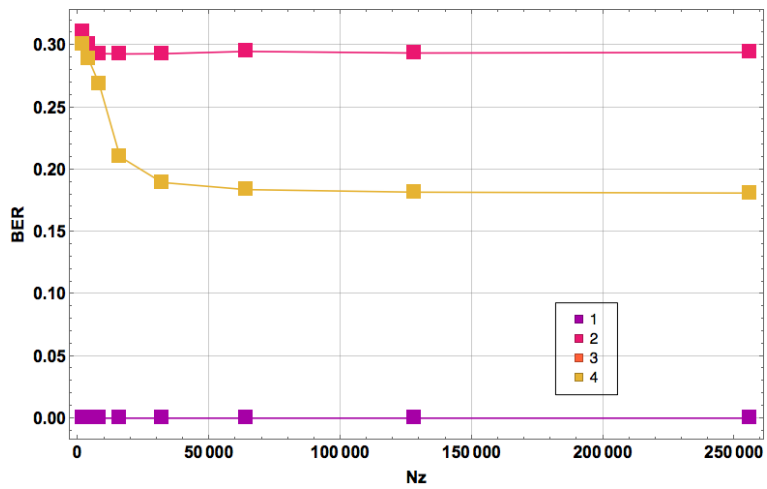


Рис. 2: Расчет BER при фиксированном количестве точек по времени на символ $\text{Incr} = 8$

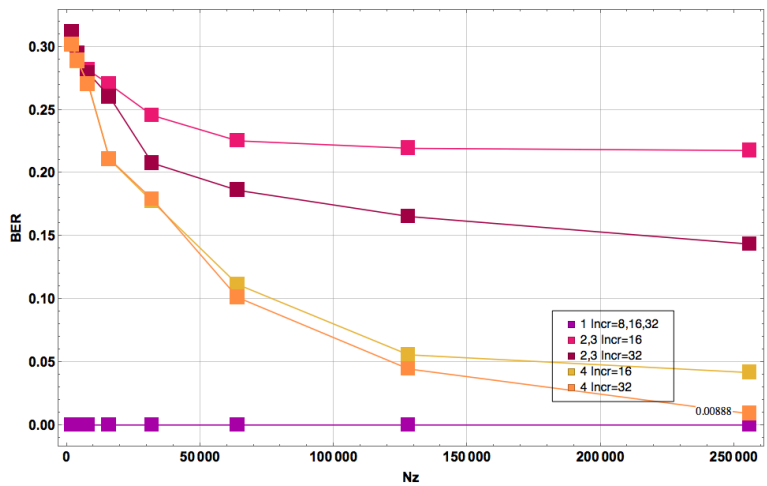


Рис. 3: Расчет BER при фиксированном количестве точек по времени на символ $\text{Incr} = 16,32$

* N_z - количество точек по пространству; Incr - количество точек по времени на символ; 1 - SSFM, 2 - схема Федорука-Паасонена, 3 - схема Федорука-Паасонена с периодическими граничными условиями, 4 - схема восьмого порядка точности.

Результаты для схем Федорука-Паасонена с различными граничными условиями совпадают.

При выбранных параметрах данные конечно-разностные методы не показали требуемой точности даже на сетках более чем в 128 раз мельче чем та, которая требуется для SSFM.

4 Сравнение по BER фактору на сигналах OFDM

OFDM - Orthogonal frequency-division multiplexing (мультиплексирование с ортогональным частотным разделением каналов) - еще одна технология уплотнения сигнала, являющаяся частным случаем WDM. OFDM импульс строится из последовательности массивов, каждый такой массив в дальнейшем называется OFDM - символом. Он представляет собой набор случайно сгенерированных чисел, соответствующих, в нашем случае, формату модуляции 16QAM, к которому применено обратное преобразование Фурье.

Символьный интервал T_s определяется для OFDM символа из формулы: $BW = \frac{K}{T_s}$, где BW - ширина спектра, а K - число каналов. BW был выбран равным $100 \cdot$, число каналов $K = 128$, отсюда находим символьный интервал $T_s = 1280 \cdot$. Соответственно нормировка T_0 была изменена на $1000 \cdot$. Для полученного распределения расчетная область была выбрана равной 128.

Результаты расчетов приведены ниже:

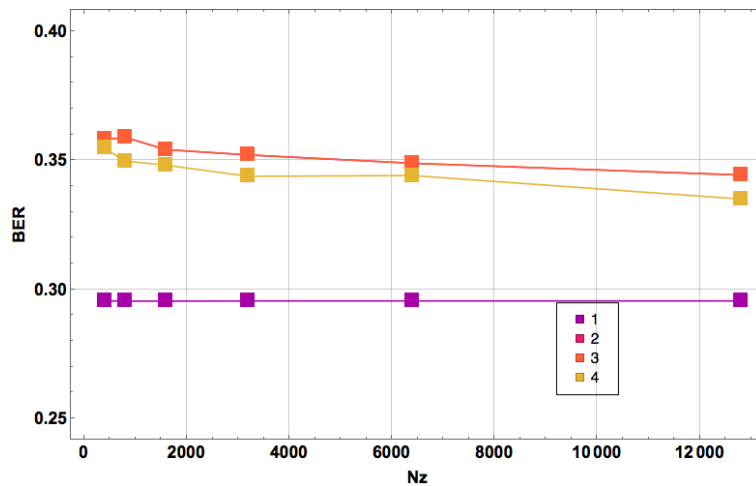


Рис. 4: Расчет BER при фиксированном количестве точек по времени на поднесущую в OFDM символе $\text{Incr} = 2$

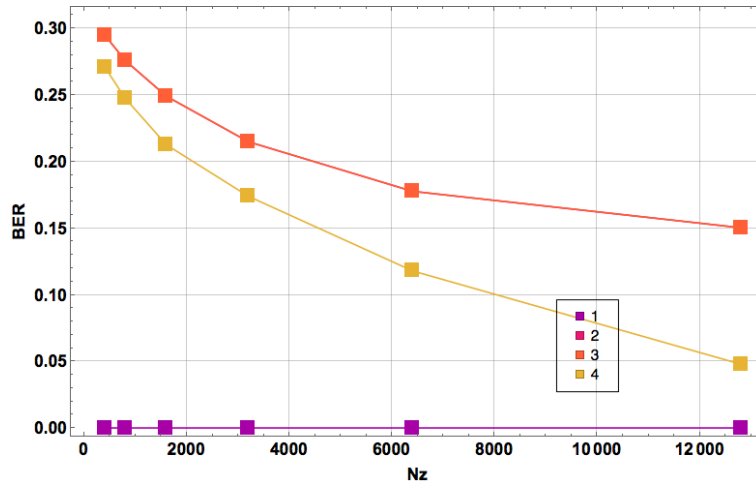


Рис. 5: Расчет BER при фиксированном количестве точек по времени на поднесущую в OFDM символе $Inst = 4$

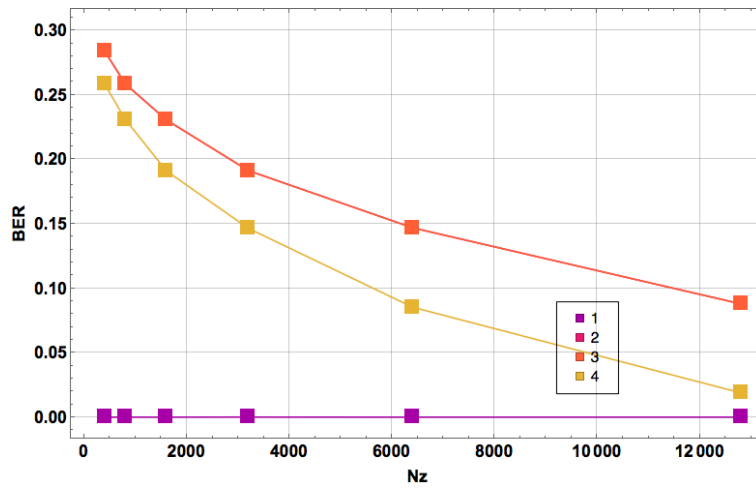


Рис. 6: Расчет BER при фиксированном количестве точек по времени на поднесущую в OFDM символе $Inst = 8$

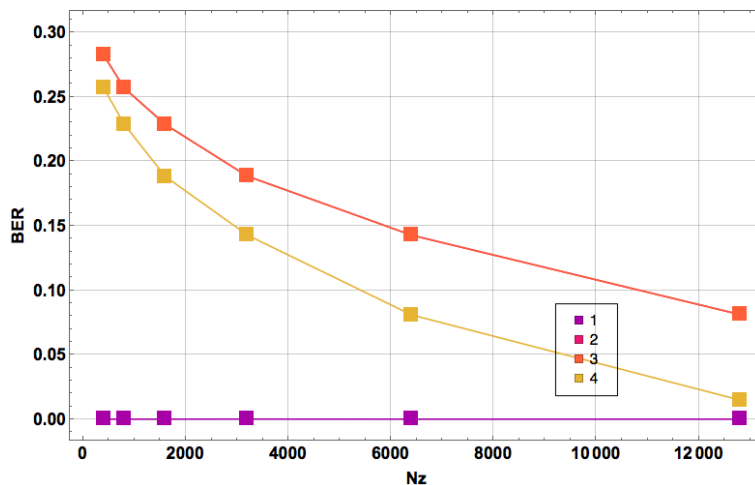


Рис. 7: Расчет BER при фиксированном количестве точек по времени на поднесущую в OFDM символе $Inc_T = 16$

* N_z - количество точек по пространству; Inc_T - параметр дискретизации генерируемого сигнала - количество точек по времени на поднесущую в OFDM символе; 1 - SSFM, 2 - схема Федорука-Паасонена, 3 - схема Федорука-Паасонена с периодическими граничными условиями, 4 - схема восьмого порядка точности.

При данных параметрах расчетов конечно - разностные схемы не достигли полученного при расчете SSFM показателя BER. Дальнейшее увеличение дискретизации сетки не является целесообразным, так как параметры расчета будут значительно превышать требуемые значения шагов для SSFM при достижении оптимального BER.

5 Заключение

Конечно-разностные схемы, рассмотренные в данной статье, имеют высокую точность и скорость работы. Их применение целесообразно для моделирования сигналов, у которых отношение дисперсионной длины к нелинейной близко к единице, о чем можно судить по результатам, полученным при расчете распространения фундаментального солитона (4). В таких условиях они ничуть не уступают SSFM, более того, линейная зависимость требуемого количества операций от количества точек сетки дает преимущество во времени работы при хорошей точности, что является несомненным плюсом. При моделировании же волокна с реальными параметрами результаты расчетов показывают, что полученное с помощью SSFM решение является "почти"точным - нелинейный оператор с уменьшением абсолютного значения кубического члена вносит все менее заметный вклад, в то время как для конечных разностей главный член погрешности, зависящий от шага по времени, преобладает во вносимой ошибке.

Список литературы

- [1] Zakharov, V.E., Shabat, A.B. Sov. Phys. JETP 34, 62 (1972).
- [2] Taha, T.R., Ablowitz, M.I. Analytical and numerical aspects of certain nonlinear evolution equations. II. Numerical, nonlinear Schrodinger equation // Journal of Computational Physics Volume 55, Issue 2, August 1984. P. 203-230

- [3] **Tingchun, W.** Convergence of an Eighth-Order Compact Difference Scheme for the Nonlinear Schrodinger Equation // *Advances in Numerical Analysis* Volume 2012, August 2012. 24 p.
- [4] **Федорук М.П., Паасонен В.И.** Компактная диссипативная схема для нелинейного уравнения Шредингера // *Вычислительные технологии*, 2011. Т. 16, No 6. С. 68–73.
- [5] **Chekhovskoy, I.S., Paasonen, V.I., Shtyrina, O.V., Fedoruk, M.P.** Numerical approaches to simulation of multi-core fibers // *Journal of Computational Physics* Volume 334, 1 April 2017. P. 31-44

Список публикаций

1. **Карпик П.А.** Исследование разностных схем для нелинейного уравнение Шрёдингера // *Вестник СГУГиТ*, Т. 24, № 2 2019