

# Тестирование ядер высокого порядка на основе полиномов Вендланда для метода SPH.

Давыдов М. Н.

## Отчет о использовании кластера НГУ (2026)

### Аннотация

Работа посвящена исследованию особенностей применения ядер высокого порядка в методе SPH. Используются ядра до 6-го порядка на основе полиномов Вендланда. В качестве тестовых примеров используются задача Сода, тест Шу-Ошера и задача о разлёте газового шара в вакуум. Представлены результаты численного решения тестов, как в 1D, так и в 3D постановках, показаны характерные особенности, связанные с порядками ядер. Программа для расчетов на C++ и CUDA написана самостоятельно, реализован параллельный расчет с использованием графических ускорителей.

### Состав коллектива.

Давыдов Максим Николаевич, к.ф.-м.н., старший научный сотрудник Института гидродинамики СО РАН (лаборатория физики многофазных сред) и старший преподаватель НГУ (ММФ, кафедра теоретической механики).

Стояновская Ольга Петровна, к.ф.-м.н., старший научный сотрудник Института гидродинамики СО РАН (лаборатория прикладной и вычислительной гидродинамики).

Работа выполнена в рамках гранта РФФ № 23-11-00142 (рук. Стояновская О.П.).

## 1 Введение

Поскольку классические ядра позволяют аппроксимировать произвольную функцию не более чем со вторым порядком аппроксимации по радиусу ядра, необходимо использовать другие подходы. Одна из идей для конструирования методов высокого порядка на основе SPH — использование знакопеременных немонотонных ядер, полученных по известному алгоритму на базе классических. Ранее было установлено, что если взять метод решения уравнений невязкой газовой динамики (пара: классическая схема и классическое ядро), который является T-устойчивым, а затем заменить в этой паре классическое ядро на ядро высокого порядка, то получившийся в результате метод потеряет T-устойчивость. Отсюда возникает необходимость комбинировать ядро высокого порядка с новым методом аппроксимации уравнений.

Задачи о движения невязкого газа, описываются уравнениями Эйлера:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \bar{v}) & = 0, \\ \frac{\partial \rho \bar{v}}{\partial t} + \nabla(\bar{v} \rho \bar{v}) & = \nabla p, \\ \rho \left( \frac{\partial e}{\partial t} + \bar{v} \nabla e \right) & = -p \nabla \bar{v}, \end{cases} \quad (1)$$

которое замыкается уравнением состояния

$$p = \rho e(\gamma - 1). \quad (2)$$

В классическом варианте Kernel derivative (KD) метода SPH аппроксимации данных уравнений для производных используется градиент ядра, а уравнение неразрывности заменяется вычислением плотности по распределению частиц.

$$\begin{cases} \rho_a = \sum_b m_b W_{ab}, \\ \frac{d\vec{v}_a}{dt} = - \sum_b m_b \left( \frac{p_a}{\rho_a^2} + \frac{p_b}{\rho_b^2} + \Pi_{ab} \right) \nabla_a W_{ab}, \\ \frac{d\varepsilon_a}{dt} = \frac{p_a}{(\rho_a)^2} \sum_b m_b \vec{v}_{ab} \nabla_a W_{ab} + \frac{m_b}{2} \sum_b \left( \Pi_{ab} \vec{v}_{ab} + 2\Theta_{ab} \frac{\vec{r}_{ab}}{r_{ab}} \right) \nabla_a W_{ab}. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь  $m_a$  – масса одной частицы,  $W_{ab} = W(\vec{r}_a - \vec{r}_b, h)$  – гладкая финитная функция (ядро) с радиусом сглаживания  $h$ ,  $\nabla_a W_{ab}$  ее производная в точке  $\vec{r}_a$ . Также добавлены слагаемые отвечающие за искусственные вязкость  $\Pi_{ab}$  и теплопроводность  $\Theta_{ab}$ :

$$\Pi_{ab} = \begin{cases} \frac{-\alpha \bar{c}_{s,ab} \mu_{ab} + \beta \mu_{ab}^2}{\bar{\rho}_{ab}} & \text{если } \vec{v}_{ab} \cdot \vec{r}_{ab} < 0, \\ 0 & \text{если } \vec{v}_{ab} \cdot \vec{r}_{ab} > 0, \end{cases} \quad \Theta_{ab} = \frac{\alpha_{tc} v_{sig}^\varepsilon (e_a - e_b)}{\bar{\rho}_{ab}}$$

$$\mu_{ab} = \frac{h \vec{v}_{ab} \cdot \vec{r}_{ab}}{r_{ab}^2 + \epsilon h^2}, \quad \bar{c}_{s,ab} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{\gamma p_a}{\rho_a}} + \sqrt{\frac{\gamma p_b}{\rho_b}} \right), \quad \bar{\rho}_{ab} = \frac{1}{2} (\rho_a + \rho_b), \quad v_{sig}^\varepsilon = \sqrt{\frac{|p_a - p_b|}{\bar{\rho}_{ab}}}$$

Искусственная вязкость  $\Pi_{ab}$  зависит от параметров  $\alpha$  и  $\beta$ , а искусственная теплопроводность  $\Theta_{ab}$  от коэффициента  $\alpha_{tc}$ .

Другой вариант Derivative free (DF) аппроксимации системы (1) использует само ядро для первых производных и разность функций. Выражения для искусственной вязкости и теплопроводности остаются теми же самыми.

$$\begin{cases} \rho_a = \sum_b m_b W_{ab} \\ \frac{d\vec{v}_a}{dt} = - \sum_b m_b \left( \frac{p_a - p_b}{(\rho_a - m_a W_{aa}) \rho_b r_{ab}} \vec{r}_{ab} W_{ab} + \Pi_{ab} \nabla_a W_{ab} \right) \\ \frac{d\varepsilon_a}{dt} = - \frac{p_a}{\rho_a - m_a W_{aa}} \sum_b \frac{m_b}{\rho_b} \left( \frac{\vec{v}_{ab} \cdot \vec{r}_{ab}}{r_{ab}^2} \right) W_{ab} + \frac{m_b}{2} \sum_b \left( \Pi_{ab} \vec{v}_{ab} + 2\Theta_{ab} \frac{\vec{r}_{ab}}{r_{ab}} \right) \nabla_a W_{ab}. \end{cases} \quad (4)$$

## 2 Результаты моделирования

В качестве первого теста используем классическую задачу о распаде разрыва (тест Сода) с известным аналитическим решением. В начальный момент времени распределение параметров газа на отрезке  $x \in [0; 1]$  следующее:

$$\begin{array}{llllll} \rho = 1.0 & v = 0.0 & p = 1.0 & e = 2.5 & x \leq 0.5 \\ \rho = 0.125 & v = 0.0 & p = 0.1 & e = 2.0 & x > 0.5 \end{array}$$

В результате распада разрыва возникает ударная волна, движущаяся в область низкого давления, вер волн разрежения, расширяющийся в область высокого давления, и контактный разрыв. Сравнение результатов расчетов будет производиться в контрольный момент времени  $t = 0.2$ .

В начальный момент область заполнялась идентичными частицами, и для получения начальных значений плотности в левой части расчетной области частицы располагались плотнее, а в правой половине — более разрежено. Для определения числа частиц мы фиксировали такой параметр как число частиц на единицу длины при единичной плотности  $N_{SPH}$ , по сути задавая массу SPH частицы. В результате, в более плотных областях число частиц в радиусе сглаживания  $h$  оказывалось больше, чем в менее плотных, но это неизбежно при фиксированном  $h$ . Параметры расчета при всех комбинациях ядер и метода аппроксимации были одинаковы. Число частиц на единицу длины при единичной плотности  $N_{SPH} = 2000$ , это дает достаточное количество частиц в более разреженной области для корректного расчета. Были выбраны фиксированные расчетные параметры: радиус сглаживания  $h = 0.02$ , шаг по времени  $\tau = 10^{-4}$ , коэффициенты искусственной вязкости  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 1.0$  и коэффициент искусственной теплопроводности  $\alpha_{tc} = 0.01$ . С одной стороны это может не быть оптимальной комбинацией для какой-то конкретной комбинации “ядро – аппроксимация”, но, с другой стороны, использование разных параметров не позволит достоверно провести сравнение расчетов и установить влияние именно метода аппроксимации или ядра.

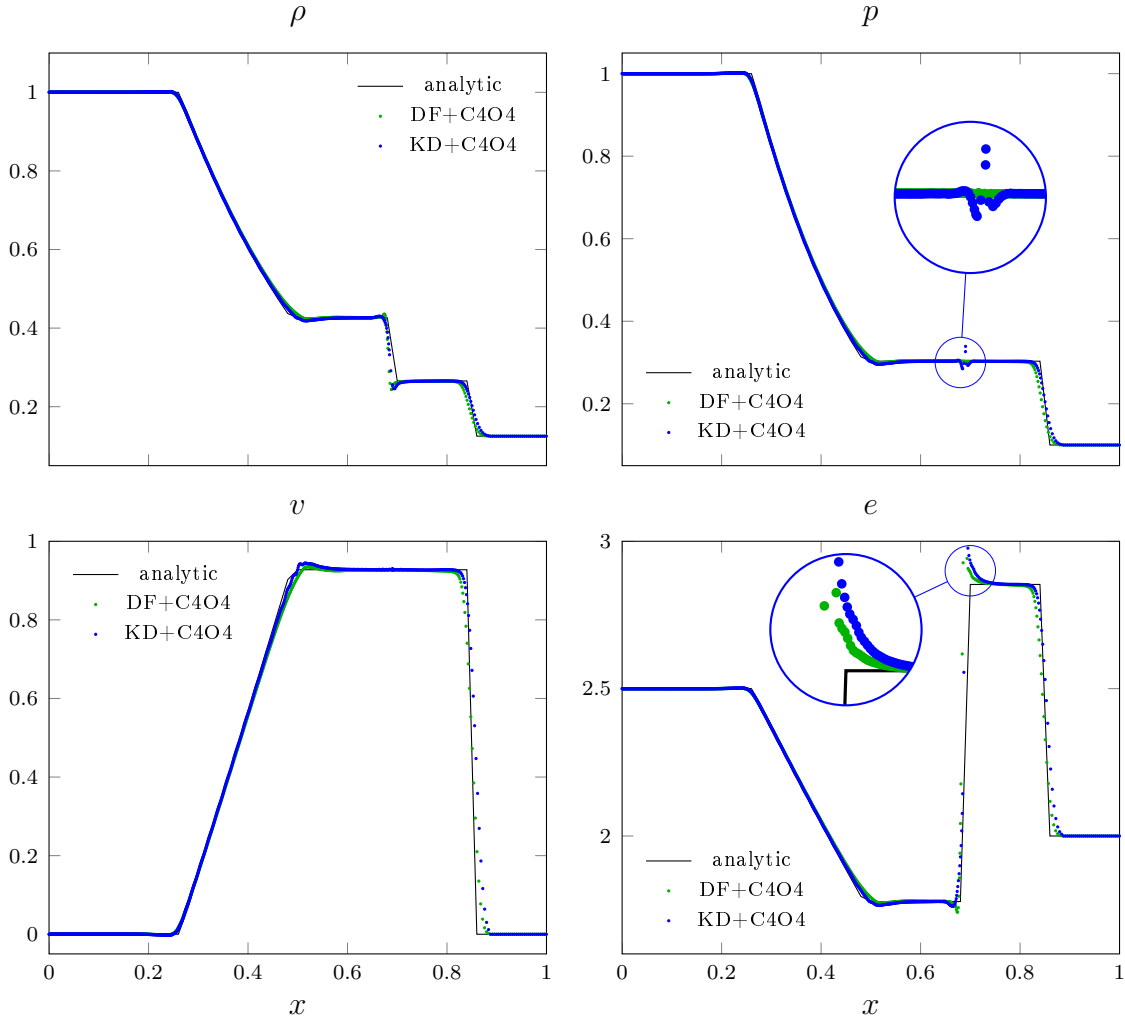


Рис. 1: Тест Сода для различных вариантов аппроксимации уравнений, ядро C4O4.

На Рис. 1 показано сравнение двух вариантов аппроксимации с использованием ядра C4O4. Плотность газа и его скорость ведут себя качественно и количественно одинаково. В обоих случаях имеется характерный подъем значения удельной внутренней энергии  $e$  на контактной границе ( $x \approx 0.7$ ), но при использовании варианта аппроксимации DF (4) данный подъем оказывается меньше. Преимущество нового метода особенно заметно на графике давления в области контактной границы, где классический вариант аппроксимации KD (3) дает пик и осцилляции давления. Данный эффект полностью отсутствует при использовании аппроксимации производной давления с использованием ядра по схеме DF.

Также можно показать что новый подход DF наиболее хорошо проявляет себя вместе с ядрами высокого порядка. Так на рисунке 2 показано распределение параметров газа и сравнение с аналитическим решением при использовании варианта аппроксимации DF и двух различных ядер — C4O2 и C4O4. Контактный разрыв на графике давления незаметен в обоих случаях, пики и осцилляции отсутствуют, что явно связано с аппроксимацией уравнений. Но при использовании ядра невысокого порядка с одной стороны уменьшается подъем значений энергии на контактной границе, но начинают формироваться осцилляции на фронте ударной волны. Данные осцилляции заметны на распределении всех параметров, но особенно явно эффект проявляется на распределении скорости.

В целом из данного сравнения можно сделать вывод, что совместное использование ядра C4O4 и нового варианта аппроксимации, с одной стороны, лучше описывает распределение параметров на контактном разрыве, а с другой — дает меньшие осцилляции на фронте ударной волны. Конечно, в одномерной задаче можно просто увеличить число частиц и тем самым улучшить пространственное разрешение, что даст более гладкое распределение и увеличит точность. Но в реальных трехмерных задачах обычно увеличить число частиц не так просто. А проведенное сравнение позволяет сделать предположение, что и в других

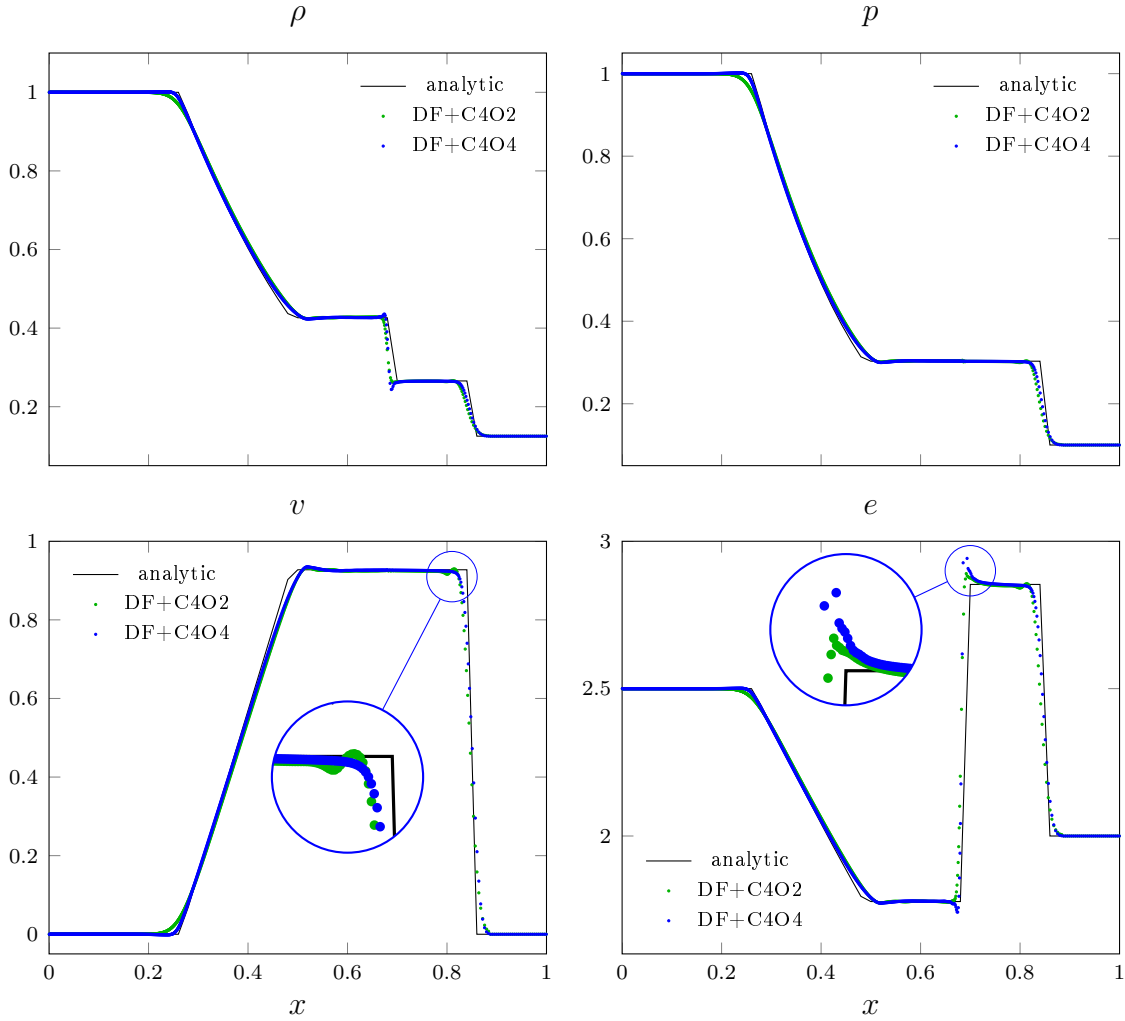


Рис. 2: Тест Сода для DF аппроксимации, ядра C4O4 и C4O2.

задачах это преимущество комбинации аппроксимации и ядер высокого порядка сохранится.

Тестирование трехмерной реализации было выполнено на задаче о регулярном разлете газового шара в вакуум. В целом результаты расчета хорошо соответствуют точному решению, все характерные особенности распределения параметров сохраняются, что показано на рис. 3 для ядра C6O4. На профиле плотности заметны осцилляции на границе с вакуумом. При разлете шара расстояния между частицами во внешнем слое естественно увеличиваются, и начинает сказываться эффект неположительности ядра. У ядер высокого порядка есть отрицательная часть, и при небольшом количестве частиц вычисленная плотность оказывается подвержена ошибкам.

### 3 Заключение

Численная реализация метода SPH в одно- и трехмерном случае была модифицирована для использования ядер высокого порядка, вплоть до C6O4. Реализация построена на базе собственного кода, для ускорения параллельного расчета используются графические ускорители с технологией nVidia CUDA. Дополнительно к классическому Kernel derivative (KD) методу, имплементирован Derivative free (DF) метод, основанный на аппроксимации уравнений с использованием ядра. Тестирование проводилось как на задаче о регулярном разлете газового шара в вакуум, имеющей аналитическое решение, так и на задаче Сода в одномерной и сферической постановках. Тестирование показало, что на имеющемся в распоряжении оборудовании можно использовать в расчетах до 20 млн. SPH частиц. Предварительные оценки показывают что с ростом числа частиц время расчета увеличивается нелинейно, что связано как с особен-

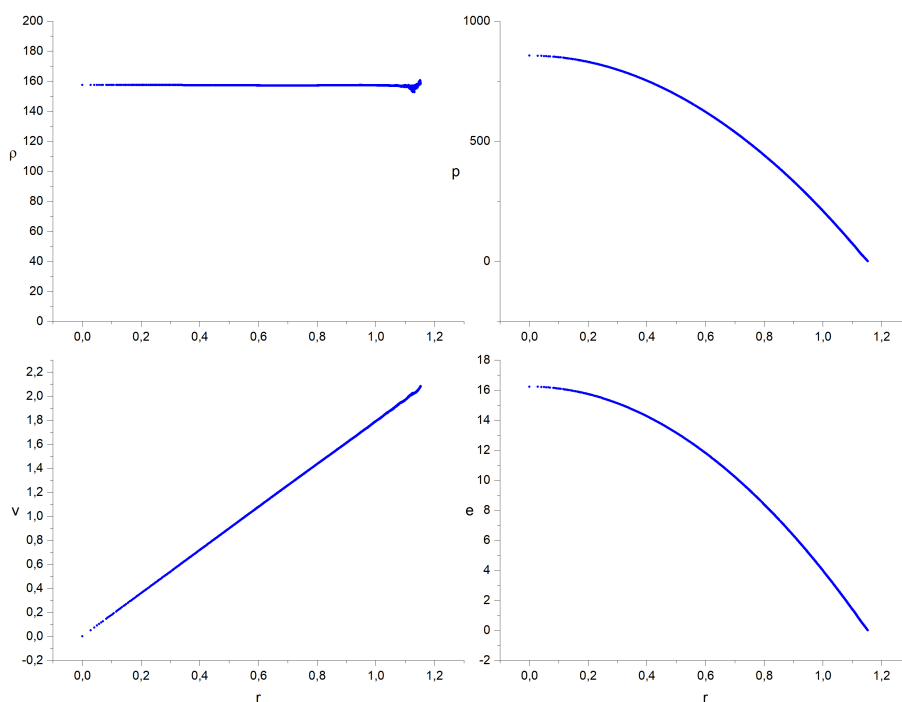


Рис. 3: Распределение параметров газа по радиальной координате при разлете газового шара (ядро Венд-ланда C6O4).

ностями архитектуры графических ускорителей, так и с потерями на пересылку данных между основной памятью и памятью карты.

Тестирование нового подхода на задаче о распаде разрыва (тест Сода) показало что схема аппроксимации DF наиболее хорошо проявляет себя вместе с ядрами высокого порядка. Контактный разрыв на графике давления становится незаметен, пики и осцилляции отсутствуют, в отличие от классического подхода. Но при использовании ядра невысокого порядка с одной стороны уменьшается подъем значений энергии на контактной границе, но начинают формироваться осцилляции на фронте ударной волны. Данные осцилляции заметны на распределении всех параметров, но особенно явно эффект проявляется на распределении скорости. В целом можно сделать вывод, что совместное использование ядра C4O4 и нового варианта аппроксимации, с одной стороны, лучше описывает распределение параметров на контактном разрыве, а с другой — дает меньшие осцилляции на фронте ударной волны. Конечно, в одномерной задаче можно просто увеличить число частиц и тем самым улучшить пространственное разрешение, что даст более гладкое распределение и увеличит точность. Но в реальных трехмерных задачах обычно увеличить число частиц не так просто. А проведенное сравнение позволяет сделать предположение, что и в других задачах это преимущество комбинации аппроксимации и ядер высокого порядка сохранится.

## Эффект от использования кластера в достижении целей работы.

Ускорение вычислений за счет использования графических ускорителей и возможность запусков расчет выполнять другую работу.

## Перечень публикаций.

1. Davydov M.N., Stoyanovskaya O.P., Savvateeva T.A., Snytnikov V.N. New 3D Benchmark for CFD-Codes Based on Analytical Solution of Spherically-Symmetric Gas Free Expansion // Commun. Comput. Phys. doi: 10.4208/cicp.OA-2024-0134 Vol. 38, No. 2, pp. 439-466 August 2025

2. Stoyanovskaya O.P., Davydov M.N., Grigoryev V.V. High Order SPH for discontinuous gas dynamics: pro and contra of derivative free approach (подготовлена к публикации)