

Новый 3D benchmark на основе аналитического решения о разлёте газа в вакуум.

Давыдов М. Н.

Отчет о использовании кластера НГУ (2024)

Аннотация

Работа посвящена адаптации аналитического решения задачи о разлёте газового шара в вакуум в качестве теста для трехмерных реализаций численных моделей газовой динамики. Тест позволяет оценить сферическую симметричность численного решения при использовании декартовой системы координат, диссипативные и дисперсионные свойства метода при конвективном переносе, точность воспроизведения решения на свободной границе. Представлены результаты численного решения задачи методом гидродинамика сглаженных частиц (SPH) в трехмерной программе, показана воспроизводимость аналитического решения в расчетах. Моделирование выполнено для двух способов расчёта плотности в методе SPH, детально описан алгоритм расчёта динамики частиц на границе газ-вакуум. Программа для расчетов на C++ и CUDA написана самостоятельно, реализован параллельный расчет с использованием графических ускорителей.

Состав коллектива.

Давыдов Максим Николаевич, к.ф.-м.н., старший научный сотрудник Института гидродинамики СО РАН (лаборатория механики многофазных сред и кумуляции) и старший преподаватель НГУ (ММФ, кафедра теоретической механики).

Стояновская Ольга Петровна, к.ф.-м.н., старший научный сотрудник Института гидродинамики СО РАН (лаборатория прикладной и вычислительной гидродинамики).

Савватеева Татьяна Александровна, младший научный сотрудник Института гидродинамики СО РАН (лаборатория прикладной и вычислительной гидродинамики).

Работа выполнена в рамках гранта РФФИ № 23-11-00142 (рук. Стояновская О.П.).

1 Введение

В работе используется известное решение задачи об истечении газа в вакуум в одномерном плоском случае. Подобные аналитические решения необходимы при разработке численных методов для компьютерного моделирования. Такие имитационные модели используются для изучения природных объектов и инженерных устройств. Разработка численных кодов подразумевает их детальное тестирование на задачах, которые имеют эталонное решение и «перекликаются» по физической постановке с теми задачами, которые будут решаться с помощью этих кодов. Это означает, что в каждом отдельном направлении вычислительной газовой динамики (внутренние течения газа, задачи обтекания, задачи со свободными границами и тому подобные) формируется своя система тестовых задач, отражающих современные знания о решенных и нерешенных проблемах численного моделирования.

Практика разработки кодов для вычислительной газовой динамики показывает, что система тестирования, в которой имеет место поэтапное усложнение тестовых задач, позволяет сократить время разработки программного обеспечения. Поэтому в данной работе представлены аналитическое решение и численная реализация сферически симметричной задачи о разлете газового шара в вакуум, которая может быть рекомендована как первый тест для программ моделирования трехмерной динамики газа. Этот тест позволяет изучить отклонение численного решения от сферической симметрии при использовании декартовой системы координат, дисперсию и диссипацию при расчете конвективного переноса, точность воспроизведения решения на свободной границе при относительно невысоком пространственном разрешении. При этом в задаче не возникает многих других численных проблем, например, скачка энтропии на сильном разрыве, наложение которых друг на друга затрудняет отладку кода. Детально показана реализация граничных условий на внешней границе шара с вакуумом, которая позволила в методе SPH за

счёт фиктивных частиц со своими параметрами и взаимодействием с основными частицами, получить хорошее соответствие с точным решением.

Рассматривается задача о движении шара из идеального газа, описываемом уравнениями Эйлера в сферической симметрии

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 u) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, \\ \rho \left(\frac{\partial e}{\partial t} + u \frac{\partial e}{\partial r} \right) = -p \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 u). \end{cases} \quad (1)$$

и уравнением состояния

$$p = \rho e(\gamma - 1). \quad (2)$$

Здесь ρ - плотность, u - скорость, p -давление, e -удельная внутренняя энергия, γ -показатель адиабаты газа.

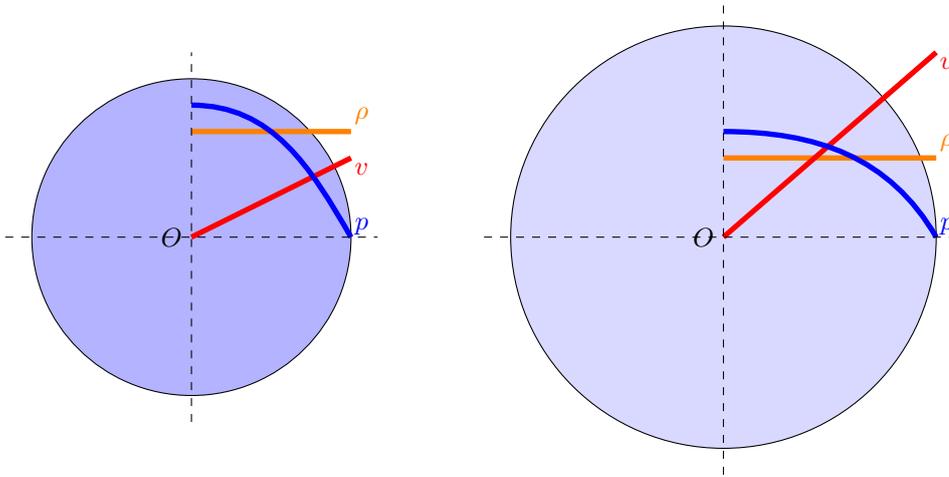


Рис. 1: Схема разлета газового шара.

Предположим, что градиент давления обеспечивает такой разлёт газа, что в каждый момент времени плотность газа в шаре не зависит от пространственной координаты, тогда как его радиус $R(t)$ изменяется со временем. В этом случае можно получить решение в квадратурах

$$\begin{cases} \rho(r, t) = \frac{3M}{4\pi R^3(t)}, \\ u(r, t) = r \cdot F(t), \\ F(t) = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)}, \\ \dot{R}(t) = \sqrt{4A \left(\frac{3M}{4\pi} \right)^2 \left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R(t)} \right) + u_0^2}, \\ \ddot{R}(t) = 2A \left(\frac{3M}{4\pi} \right)^{1/3} \cdot \frac{1}{R^2(t)} = \frac{C_0}{2R^2(t)}, \\ p(r, t) = \frac{3M}{4\pi} \frac{\ddot{R}(t)}{2R^2(t)} \left(1 - \frac{r^2}{R^2(t)} \right), \\ e(r, t) = \frac{3p(r, t)}{\rho(r, t)}. \end{cases} \quad (3)$$

Из полученных соотношений следует, что предельная скорость разлета газа имеет вид

$$U_{\max} = \sqrt{4A \left(\frac{3M}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{R_0} + u_0^2}. \quad (4)$$

Газовый шар может начинать разлетаться из состояния покоя при $u_0 = 0$. Разлет газа носит неизэнтропический характер.

2 Результаты моделирования

Будем решать задачу методом сглаженных гидродинамических частиц (Smoothed Particle Hydrodynamics, SPH) [1] в трехмерной постановке. Этот метод относится к чисто лагранжевым методам и позволяет провести численное исследование течения среды в областях со сложной геометрией или в сильно деформирующейся области расчёта. В частности метод используется при моделировании разлёта или разрушения среды.

Моделируемый шар был окружён граничными частицами, для них значения внутренней энергии e_i , давления p_i и плотности ρ_i вычислялись таким же образом, как и для внутренних частиц. Скорость же вычислялась исходя из соображения чтобы граничные частицы двигались синхронно с расширением шара и сохраняли гладкость распределения основных параметров газа на границе. Поэтому скорость в граничных частицах задавалась в соответствии с распределением скорости во внутренних частицах, где коэффициент пропорциональности K на каждом шаге по времени вычислялся методом наименьших квадратов:

$$\bar{v} = K\bar{r}, \quad K = \frac{\sum_i v_i r_i}{\sum_i r_i^2}. \quad (5)$$

Здесь суммирование производится по всем внутренним частицам. Таким образом скорости граничных частиц фактически вычисляются экстраполяцией по скоростям всех внутренних частиц, используя данные о сферически симметричном разлёте шара. Данное обстоятельство не является принципиальным, вычислять скорости граничных частиц можно используя скорости внутренних частиц попадающих в $2h$ окрестность граничной частицы, то есть по ближайшему окружению. Заметим что моделирование границы с помощью набора частиц со своими характеристиками и особым взаимодействием с основными частицами является обычной практикой в методе SPH.

Был проведен расчет со следующими начальными параметрами: $M = 1000, R_0 = 1, u_0 = 0.1, \gamma = 4/3$. В начальный момент времени область $r < 1.2$ равномерно, с одинаковым шагом, из расчёта 40 частиц на единицу длины, по всем декартовым координатам заполнялась SPH-частицами. Все частицы имели одинаковую массу, начальная скорость, и энергия задавалась в соответствии с (3). В случае расчёта плотности по уравнению неразрывности в частицах также задавалась начальная плотность, для другого случая плотность вычислялась по физическому распределению массы в пространстве. Частицы попавшие в область $r < 1.0$ считались внутренними и моделировали расширяющийся шар, таковых оказалось 267 749, остальные считались граничными частицами и моделировали границу с вакуумом. Достаточно окружить моделируемый шар слоем частиц толщиной $2h$, но в расчёте это значение было взято с запасом и фактически было в два раза больше. Разделение на внутренние и граничные частицы производилось в начальный момент и в процессе расчета статус частицы не изменялся. Общее число частиц в расчёте составляло 492 105. На протяжении моделирования радиус сглаживания $h = 0.05$ и шаг по времени $\tau = 0.001$ оставались постоянными.

Распределение параметров газа в зависимости от радиальной координаты для различных моментов времени приведено на рисунках 2–3.

К моменту времени $t = 0.2$ шар увеличился в размерах, в расчётах его радиус ≈ 1.25 , что хорошо согласуется с аналитическим решением. Энергия в центре шара уменьшилась с начальных 18.6 до 15, а давление упало от 1500 до 600, при этом характер распределения сохранился, также на границе с вакуумом энергия и давление нулевые. Скорость разлёта увеличилась на порядок, граничные частицы имеют скорость ≈ 2.23 при начальной 0.1, центр шара по-прежнему покоится. Характер изменения плотности также совпадает с аналитическим решением, плотность во всём шаре остаётся постоянной и к этому моменту уменьшилась до ≈ 123.36 , что несколько выше аналитического значения 122.805, но отличается от него менее чем на процент.

3 Заключение

В работе описана задача о сферически-симметричном разлете газового шара в вакуум, при котором плотность шара в каждый момент времени однородна по пространству, а скорость линейно зависит от радиуса.

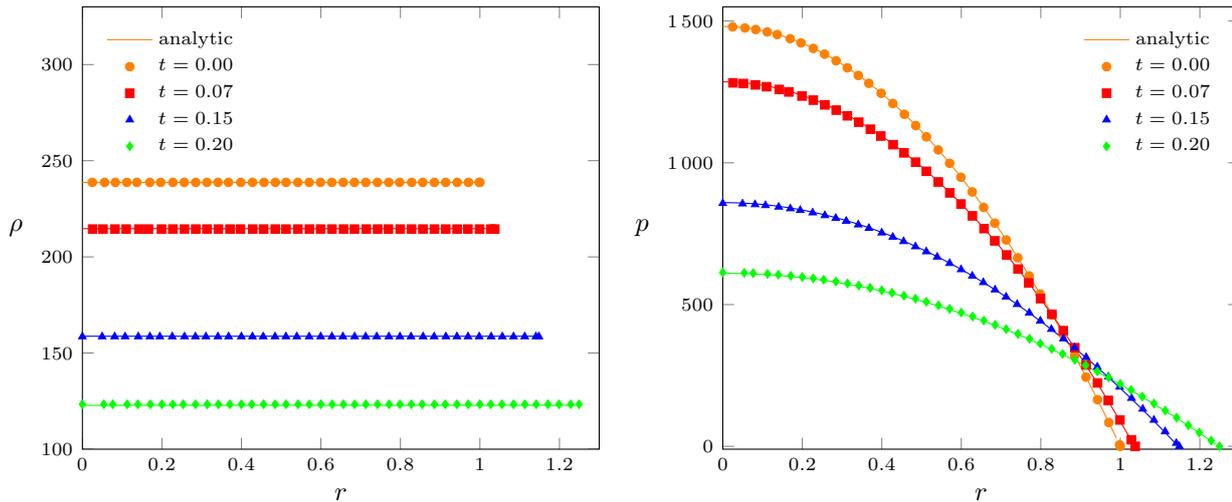


Рис. 2: Распределение плотности и давления газа вдоль радиальной координаты r . Точки — метод SPH, сплошная линия — аналитическое решение.

Задача ставится для уравнений Эйлера идеального газа. Приведен способ построения аналитического решения этой задачи с самым решением для $\gamma = 4/3$. Данную задачу рекомендуется использовать как тест при разработке численных моделей трехмерной динамики газа.

Численное решение задачи о разлете газового шара выполнено методом SPH. Показано хорошее соответствие результатов численной реализации в трехмерном случае и аналитического решения. Продемонстрировано, что тест позволяет оценить сферическую симметричность численного решения при использовании декартовой системы координат, диссипативные и дисперсионные свойства метода при конвективном переносе, точность воспроизведения решения на свободной границе. Отметим, что при использовании относительно небольшого пространственного разрешения (40 модельных частиц на радиус шара), погрешность при расчете плотности разлетающегося шара не превосходит 1 процента при сохранении равномерного характера распределения плотности.

Список литературы

- [1] Monaghan J J 2005 *Reports on Progress in Physics* **68** 1703
- [2] Monaghan J 2020 *European Journal of Mechanics - B/Fluids* **79** 454 – 462 ISSN 0997-7546 URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0997754619302390>

Эффект от использования кластера в достижении целей работы.

Ускорение вычислений за счет использования графических ускорителей и возможность запускать расчеты выполнять другую работу.

Перечень публикаций.

1. Davydov M. N., Stoyanovskaya O. P., Glushko T. A. Numerical modelling of a gas-dust sphere scattering by SPH-IDIC method
Journal of Physics: Conference Series, Vol. 1675, 2020, IOP Publishing, p. 012071.
2. М. Н. Давыдов, Т. А. Савватеева, В. Н. Снытников, О. П. Стояновская «Регулярный разлет газового шара в вакуум: Аналитическое решение и моделирование методом SPH» IX Международная конференция «Лазерные, плазменные исследования и технологии» - ЛаПлаз-2023, 28-31 марта 2023 г., Москва, НИЯУ МИФИ.

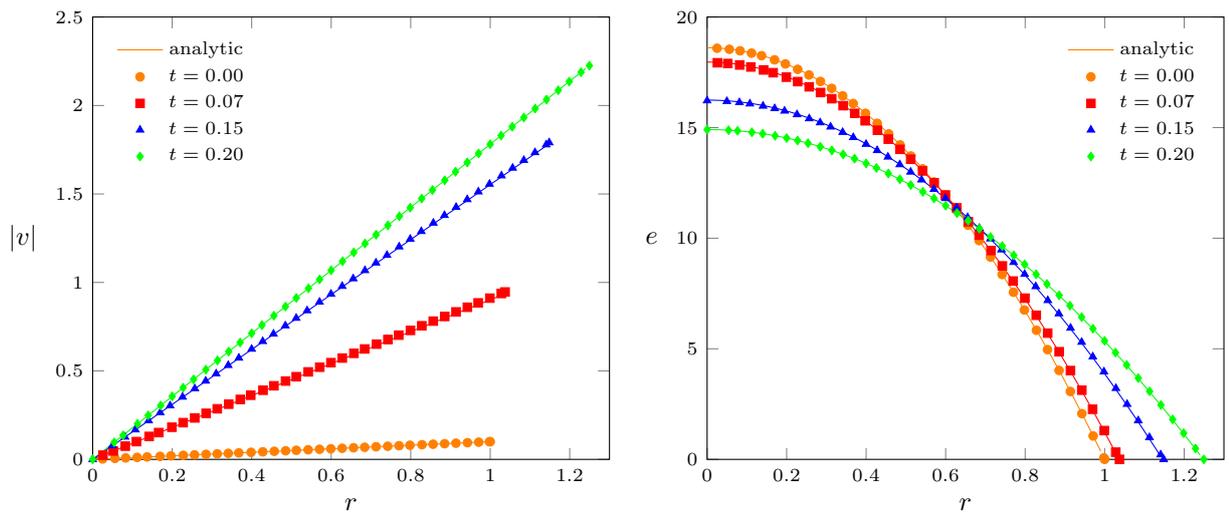


Рис. 3: Распределение скорости и энергии газа вдоль радиальной координаты r . Точки — метод SPH, сплошная линия — аналитическое решение.

3. Davydov M.N., Stoyanovskaya O.P., Savvateeva T.A., Snytnikov V.N. New 3D benchmark for CFD-codes based on analytical solution of spherically-symmetric gas free expansion (подготовлено к публикации)