

Чеховской Игорь Сергеевич, i.s.chekhovskoy@nsu.ru

НГУ (ЛМУФ ММФ НГУ, ЛНФ ФФ НГУ), старший научный сотрудник

Тема работы: Метод обратной задачи рассеяния для нелинейного уравнения Шредингера

Состав коллектива:

- Федорук Михаил Петрович, НГУ, ректор, д.ф.-м.н., академик РАН, mifester@gmail.com, руководитель.
- Турицын Сергей Константинович, Астонской Институт Технологий Фотоники, директор, к.ф.-м.н., профессор, руководитель.
- Медведев Сергей Борисович, НГУ, ИВТ СО РАН (директор), д.ф.-м.н., консультант.
- Штырина Ольга Владимировна, НГУ, ИВТ СО РАН (старший научный сотрудник), научный сотрудник, к.ф.-м.н., \ olya.shtyrina@gmail.com, консультант.

Работа проводилась в рамках гранта РФФИ №20-11-20040,
<https://rscf.ru/project/20-11-20040/>

Руководитель: Федорук М. П.

Срок действия гранта: 2020--2024

Аннотация: Работа посвящена новому приложению метода обратной задачи рассеяния (МОЗР), также известного как нелинейное преобразование Фурье (NFT -- nonlinear Fourier transform). Захаров и Шабат показали [V. E. Zakharov and A. B. Shabat, J. Exp. Theor. Phys. 34, 62 (1972)], что с помощью МОЗР можно проинтегрировать одну из основных моделей нелинейной физики -- нелинейное уравнение Шредингера (НУШ), для чего нужно решить так называемую спектральную задачу Захарова-Шабата (ЗЗШ). Метод по аналогии с обычным преобразованием Фурье позволяет упростить анализ и свести сложную нелинейную динамику к простой эволюции в определенном базисе -- так называемом нелинейном спектре сигнала. В данной работе проведено исследование возможности применения NFT в задачах, связанных с передачей данных с помощью волоконно-оптических линий связи.

Научное содержание работы

Постановка задачи

Целью работы была разработка нового подхода к повышению точности и эффективности обработки непрерывных сигналов с использованием нелинейного преобразования Фурье (NFT) с затухающими граничными условиями. Для этого была использована техника скользящего окна, разделяющая непрерывный сигнал на неперекрывающиеся сегменты, которые затем обрабатываются с использованием NFT. В частности, был предложен новый метод, включающий предварительную компенсацию хроматической дисперсии для обработки отдельных окон, что повысило производительность NFT и снизило общую вычислительную сложность. Такой подход позволяет применять NFT к сигналам с большой длительностью, что ранее было крайне сложной задачей из-за высокой вычислительной сложности и накапливающихся ошибок. Новый инструмент позволяет разложить длинный сигнал на набор коротких. Это существенно упрощает расчет нелинейного спектра (особенно дискретного спектра), тем самым повышая точность расчета характеристик спектра, таких как константы нормировки. В текущем отчете подробно объясняются математические принципы и приводятся численные расчеты, лежащие в основе данного подхода, демонстрирующие его эффективность в ряде сценариев. В частности, представлены результаты для одинарной поляризации, а также для сигнала WDM 16-QAM, передаваемого по участку стандартного одномодового волокна размером 12×80 км, как с шумом от усилителя на основе легированного эрбием волокна, так и без него.

Современное состояние проблемы

Нелинейное преобразование Фурье (NFT) является мощным инструментом для анализа нелинейных систем, особенно периодических или квазипериодических по своей природе. В последние годы оно применяется в различных областях науки, включая нелинейную и квантовую оптику.

Одним из существенных преимуществ NFT является его способность рассчитывать распространение сигнала на большие расстояния с помощью трех шагов: прямого NFT для расчета нелинейного спектра, эволюции нелинейного спектра и обратного NFT для реконструкции сигнала. Такой подход позволяет точно моделировать сложные взаимодействия между хроматической дисперсией и нелинейными явлениями, такими как эффект Керра, которые возникают при распространении оптических сигналов на большие расстояния.

Что касается нелинейных взаимодействий, NFT является ключевым инструментом для повышения эффективности оптических систем связи и увеличения пропускной способности. Кроме того, NFT обеспечивает более точное представление сигнала и его нелинейных искажений, облегчая проектирование более эффективных систем связи. Это включает в себя улучшенные схемы модуляции и обнаружения, а также передовые методы исправления ошибок.

Однако существуют также проблемы с использованием NFT в оптических телекоммуникациях. Вычислительная сложность алгоритмов NFT может быть значительной, особенно для систем с несколькими каналами. Кроме того, реализация обработки сигналов на основе NFT может потребовать специализированного оборудования или программного обеспечения, что увеличивает сложность и стоимость системы.

Применение NFT к непрерывным сигналам представляет собой значительную проблему, поскольку простое разделение сигнала на неперекрывающиеся части с использованием метода скользящего окна не обеспечивает эффективной обработки. Нами был представлен новый метод повышения точности и эффективности обработки непрерывных сигналов с использованием NFT с затухающими граничными условиями. Этот метод направлен на решение проблем, связанных с традиционными алгоритмами NFT, и предлагает многообещающее решение для обработки сигналов.

Описание работы и использованные алгоритмы

Модели оптических каналов передачи данных

Нелинейное уравнение Шрёдингера (НУШ) и уравнение Манакова — это две широко используемые математические модели для описания поведения распространения света в одномодовом оптическом волокне, включающие эффекты дисперсии и нелинейности. В контексте передачи данных с помощью оптического волокна, НУШ используется для описания эволюции медленно изменяющейся оптической огибающей поля, $A(z, t)$, при наличии дисперсии и нелинейности. Общая форма НУШ:

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -\frac{\alpha}{2}A - i\frac{\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + i\gamma|A|^2A,$$

где z обозначает расстояние вдоль волокна, t — время, β_2 — параметр дисперсии групповой скорости (GVD), γ — нелинейный коэффициент, а A — комплексная огибающая оптического поля.

Метод обратной задачи рассеяния (МОЗР)

НУШ относится к классу так называемых *интегрируемых* нелинейных уравнений в частных производных, которые могут быть проинтегрированы методом обратной задачи рассеяния (inverse scattering transform – IST), также известным как нелинейное Фурье преобразование (NFT). Обратное преобразование рассеяния позволяет найти эволюцию (по z) сигнала $q(t, z)$, описываемого NLSE, решив две линейные задачи вместо решения нелинейного дифференциального уравнения с частными производными. Таким образом, сложная нелинейная динамика сигнала заменяется 3 шагами:

- 1) прямое (линейное) преобразование от $q(t, z = 0)$ к так называемым данным рассеяния $\Sigma(0)$ (нелинейный спектр начального сигнала),
- 2) тривиальная эволюция нелинейного спектра с z , и
- 3) обратное (линейное) преобразование для восстановления сигнала $q(t, z)$ на любом расстоянии распространения z .

Прямое NFT представляет собой решение спектральной задачи Захарова-Шабата (ZSSP)

$$\begin{cases} -\partial_t \psi_1 + q(t, 0)\psi_2 = i\xi \psi_1 \\ \partial_t \psi_2 + q^*(t, 0)\psi_1 = i\xi \psi_2 \end{cases}$$

где $q(t, z = 0) = q_0(t)$ — "потенциал" — начальное распределение сигнала для передачи, $\psi_{1,2}$ — собственная функция и $\xi = \lambda + i\zeta$ — спектральный параметр, определенный на комплексной плоскости. Для определения нелинейного Фурье-спектра, связанного с сигналом $q(t, z)$, нужно найти специальное решение $\Phi(t, \xi)$ ZSSP, называемое функцией Йоста, налагая специальное асимптотическое условие на краях импульса:

$$\Phi(t, \xi) \equiv (\phi_1 \ \phi_2) \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} (e^{-i\xi t} \ 0).$$

Это означает, что при использовании NFT в ВОЛС придется передавать данных в burst-режиме, т.е. использовать интервалы с сигналом T_{burst} , в которых кодируется информация, и защитные интервалы T_{guard} без сигналов между ними. Одна из целей этого проекта — выяснить, насколько велико может быть соотношение T_{burst}/T_{guard} , при котором алгоритмы IST/NFT все еще будут работать. Основная часть IST/NFT — вычисление коэффициентов рассеяния, $a(\xi) \in \mathbb{C}$ и $b(\xi) \in \mathbb{C}$, определяемых через решение Йоста $\Phi(t, \xi)$:

$$a(\xi) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_1(t, \xi) e^{i\xi t}, \quad b(\xi) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_2(t, \xi) e^{-i\xi t},$$

где $\xi \in \mathbb{R}$. Коэффициенты рассеяния для рассматриваемого NLSE с аномальной дисперсией удовлетворяют условию $|a(\xi)|^2 + |b(\xi)|^2 \equiv 1$.

Непрерывная часть NF спектра обычно определяется отношением величин b и a :

$$r(\xi) = b(\xi)/a(\xi), \quad r(\xi) \in \mathbb{C},$$

где $r(\xi)$ называют коэффициентом отражения. Для параметра $\xi = \zeta$, при $\text{Im } \zeta > 0$, нули коэффициента $a(\zeta_n)$ определяют дискретный спектр ζ_n , для $n = 1 \dots N$, где N — количество дискретных собственных значений. Параметр

$$c_n(z) = c(\zeta_n, z) = \frac{b(\zeta_n)}{a'(\zeta_n)}, \quad \text{где} \quad a'(\zeta_n) = \left. \frac{\partial a(\zeta)}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=\zeta_n},$$

называется фазовым коэффициентом, который определяет комплексный фазовый сдвиг для каждого солитона. Полученные коэффициенты называются "данными рассеяния", которые определяют начальный потенциал $q_0(t)$. Зависимость данных рассеяния от z может быть представлена в виде:

$$r(\xi, z) = r(\xi, z_0)e^{-2i\xi^2(z-z_0)}, \quad c_n(z) = c_n(z_0)e^{-2i\zeta_n^2(z-z_0)}.$$

Из данных рассеяния определяется ядро $\Sigma(z) = \Sigma_{dis}(z) + \Sigma_{con}(z)$, где

$$\Sigma_{dis}(z) = \sum_n^N c_n(z)e^{-i\zeta_n z}, \quad \Sigma_{con}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi r(\xi, z)e^{-i\xi z}.$$

Заключительным этапом NFT является восстановление сигнала из данных рассеяния. Чтобы восстановить сигнал $q(t, z)$ в требуемой точке z , полученное ядро $\Sigma(z)$ должно быть подставлено в пару интегральных уравнений, называемых уравнениями Гельфанда-Левитана-Марченко (GLM):

$$A_1(t, s) + \int_{-s}^t \Sigma(s + \tau)A_2(t, \tau)dt = 0,$$

$$-A_2(t, s) + \int_{-s}^t \Sigma(s + \tau)A_1(t, \tau)dt + \Sigma(t + s) = 0,$$

где параметры находятся в пределах $-t \leq s < t$ и $0 \leq t \leq T$, $\Sigma(t) \equiv \Sigma(z = 0, t)$. Пара функций A_1 и A_2 составляют решение уравнений GLM. После нахождения функций A_1 и A_2 , сигнал восстанавливается по простой формуле

$$q(z, t) = -2A_2^*(t, t).$$

3.3 Обработка с помощью скользящего окна

Стандартный подход для обработки с помощью окна заключается в разбиении полученного на приемнике сигнала на равные части и применении NFT к ним для вычисления

значения сигнала на приемнике. Из-за дисперсионного расплывания данных подход может применяться только для burst-режима, когда между отдельными частями сигнала T_{proc} есть защитные интервалы для учета дисперсионного расплывания T_d . Длина интервала T_d , зависит от расстояния распространения и может быть вычислена по формуле:

$$T_d = \beta_2 \times \Omega \times L,$$

где β_2 – параметр дисперсии групповой скорости волокна, L – расстояние распространения, Ω – полоса пропускания сигнала.

Мы предложили подход, позволяющий устранить этот недостаток, и восстанавливать непрерывный сигнал без необходимости вставки интервалов для учета дисперсионного расплывания. Для этого было предложено "сжимать" сигнал перед обработкой путем компенсации хроматической дисперсии. Хотя эта операция возвращает символы в их первоначальные позиции, она вводит некоторый уровень искажения из-за нелинейных эффектов во время распространения. После компенсации дисперсии во всем длинном сигнале выполняется вырезание его части (применение оконной функции), затем декомпенсация дисперсии в вырезанном сигнале, и оконная обработка сигнала с помощью NFFT.

Для начала процесса мы компенсируем дисперсию по всему сигналу с помощью уравнения:

$$A_{CD}(t) = F^{-1}FA(t)e^{i\phi_{CD}(\omega)},$$

Здесь $F[\cdot]$ и $F^{-1}[\cdot]$ представляют прямое и обратное линейные Фурье преобразования соответственно. Сдвиг фазы ϕ_{CD} может быть определен из НУШ, установив $\gamma = 0$ и $\alpha = 0$:

$$\phi_{CD} = -\frac{\beta_2}{2}\omega^2L.$$

Здесь β_2 обозначает коэффициент дисперсии второго порядка волокна, ω - угловая частота, а L представляет длину волокна.

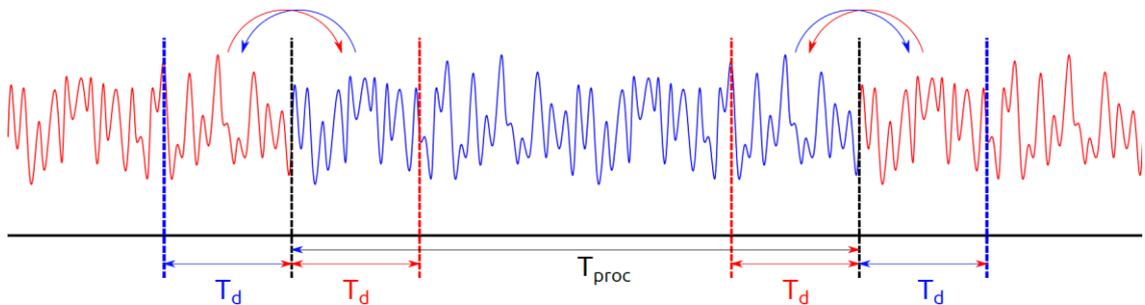


Рис.1. Параметры окна для обработки сигнала.

Для восстановления сигнала используется окно размером T_w символов:

$$T_w = T_{proc} + 2 \cdot (R_d \cdot T_d + T_z); \quad T_{proc} = N \cdot T_s.$$

Здесь T_{proc} представляет интервал обработки с N символами, а T_s обозначает длительность одного символьного интервала. Множитель R_d представляет собой масштаб для дополнительного учета дисперсионного расплывания, в то время как слагаемое T_z соответствует количеству дополнительных пустых символьных слотов, добавленных к каждой стороне обрабатываемого интервала для повышения точности NFT.

Окончательная процедура обработки непрерывного WDM-сигнала с использованием NFT представляет собой последовательность действий:

- 1) Компенсировать дисперсию распространённого сигнала
- 2) Определить и выделить требуемое окно в компенсированном сигнале
- 3) Декомпенсировать дисперсию для сигнала в текущем окне
- 4) Обработать сигнал в текущем окне с использованием NFT
- 5) Собрать полный сигнал из отдельных.

Полученные результаты

Для оценки эффективности предложенного метода мы использовали одноканальный сигнал с использованием мультиплексирования с разделением по длине волны (WDM). В системах оптической связи передаваемый сигнал может быть представлен как сумма произведения символов 16-квадратурной амплитудной модуляции (16-QAM) и функции формирования импульса со временной задержкой kT :

$$A(t) = \sqrt{P_0} \sum_{k=1}^K c_k \cdot f(t - kT),$$

Здесь c_k обозначает символы 16-QAM, P_0 представляет среднюю мощность сигнала, K означает количество переданных символов, $f(t)$ является функцией, задающей форму импульса, а T обозначает интервал между символами. Для рассматриваемой одноканальной линии передачи мы использовали цифровой фильтр с характеристикой типа «приподнятый косинус» (RRC) с коэффициентом сглаживания $\beta = 0.01$ в качестве функции, задающей форму импульса. Линия передачи длиной 960 км была разделена на 12 сегментов, каждый из которых составляет 80 км волокна. После каждого сегмента находился идеальный эрбиевый

волоконный усилитель (EDFA), который может компенсировать потери на участке в 0.2 дБ/км. Вместо добавления шума после каждого усиления для вычислительной эффективности мы учли совокупный шум на конце волоконной линии связи. Он представляет собой общий шум спонтанного усиления (ASE) каждого EDFA. Мы проверили этот подход, сравнив его результаты с моделированием, где шум добавлялся после каждого усиления, и обнаружили лишь незначительные различия в результатах.

В данном исследовании мы рассматривали два сценария: в первом сценарии анализировалась система без шума EDFA, во втором сценарии анализировалась система с шумом EDFA, характеризуемым коэффициентом шума 4.5 дБ. Моделирование проводилось с использованием метода расщепления по физическим процессам (SSFM) на длине волны $\lambda = 1550$ нм. Волокно характеризовалось коэффициентом затухания $\alpha = 0.2$ дБ/км, коэффициентом дисперсии $D = 16.8$ пс/(нм·км) и нелинейным коэффициентом $\gamma = 1.2$ 1/(Вт·км).

Результаты для одной поляризации (случай NLSE)

Представленный подход имеет несколько параметров для оптимизации, таких как T_{proc} , R_D и полный размер окна T_w . Для соответствующего расстояния распространения 960 км дисперсионная длина T_d равна 297 символам или примерно 440 пс при $T_s = 14.8$ пс.

Обратное NFT выполнялось с использованием быстрого варианта численного метода из библиотеки FNFT (схема Абловица-Ладика). Алгоритм работает только с вычислительными сетками, размер которых равен степени 2. Поэтому для такого длинного расстояния распространения минимальный T_w должен быть не менее 1024 (≈ 1.5 нс), чтобы включить интервалы $2T_d$. Мы также рассмотрели размер окна 2048 символов (≈ 3 нс). Интервал символов в 4096 символов уже оказался слишком большим для численных расчетов из-за роста вычислительной сложности $\mathcal{O}(N \log^2 N)$.

Прямое NFT выполнялось в два отдельных этапа. Сначала применялся метод отслеживания фазового скачка (PJT) с адаптивным размером шага для поиска дискретных собственных значений. Этот метод использовал эффективную экспоненциальную схему 6-го порядка (ES6) с аппроксимацией Паде матричной экспоненты. Несмотря на это, поиск дискретных собственных значений был самым времязатратным этапом одного расчета. Во-вторых, расчет непрерывного спектра проводился с использованием быстрой схемы FNFT_TES4_5B, которая обеспечивала наиболее стабильные результаты в сочетании со схемой для обратного FNFT. Мы использовали увеличение частоты дискретизации

непрерывного спектра вплоть до 16 раз для повышения стабильности обратного преобразования и улучшения точности обнаружения фазового скачка на вещественной оси.

Одним из ключевых практических соображений в нашем исследовании является определение подходящего размера интервала обработки, T_{proc} . С целью минимизации дополнительных вычислительных усилий по сравнению с традиционным подходом, мы стремились максимизировать размер интервала обработки. Наши исследования показали, что окно размером $T_w = 2048$ символов является более перспективным подходом, так как его широкие нулевые хвосты (T_z) приводят к малому шагу в частотной области, что улучшает точность восстановления оптического поля.

В первых исследованиях мы использовали коэффициент масштабирования для учета дисперсии $R_d = 1.2$. Мы исследовали влияние шума на различные значения средней мощности P_0 . На Рис. 3 представлено сравнение режима без шума и режима с шумом мощностью 4.5 дБм. Мы обнаружили, что наличие шума лишь незначительно увеличивает размер дискретного спектра.

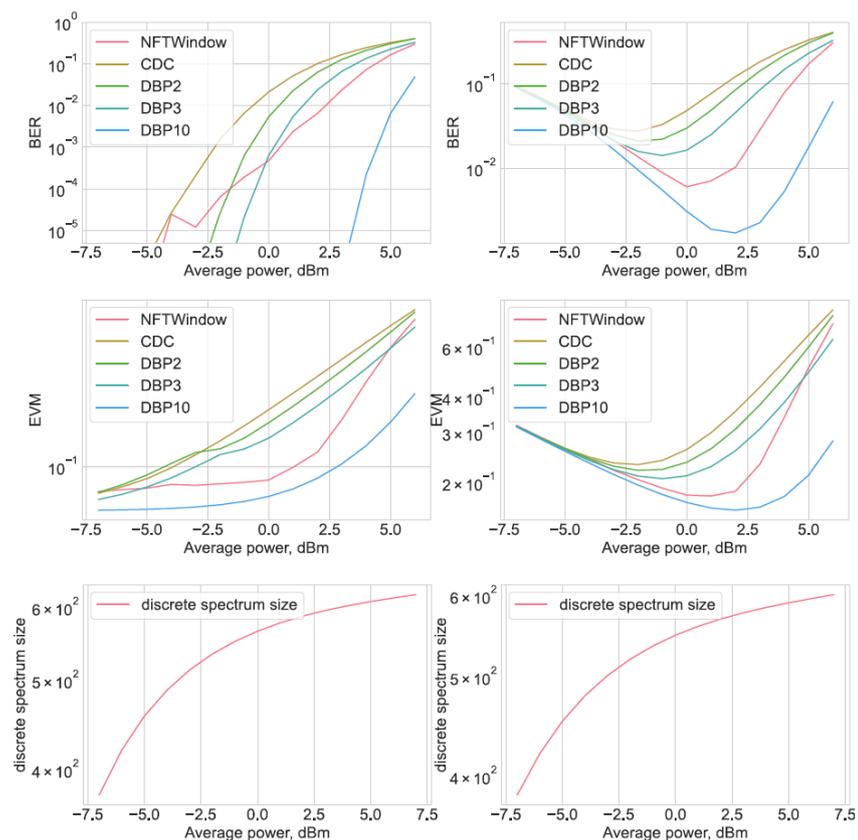


Рис. 3. Зависимость BER, EVM и размера дискретного спектра от средней мощности сигнала P_0 . Левая колонка соответствует безшумному случаю, правая колонка соответствует мощности шума 4.5 дБм. Общий размер окна составляет $T_w = 2048$. Количество обработанных символов $T_{proc} = 512$. Коэффициент масштабирования расширения дисперсии $R_d = 1.2$.

При всех рассмотренных значениях средней мощности подход NFT с окном превосходил DBP с 2 шагами на пролет с точки зрения битовой ошибки (BER) и величины вектора ошибки (EVM). В некоторых нелинейных режимах подход NFT демонстрировал большую точность, чем DBP с 3 шагами на пролет. Однако следует отметить, что точность подхода NFT не может достичь точности DBP с 10 шагами на пролет.

Эффект от использования кластера в достижении целей работы

Расчеты проводились для большого количества различных значений параметров системы – числа обрабатываемых символов, числа символов для учета влияния дисперсии, различных средних мощностей, поэтому использование кластера существенно сократило время получения результатов. Запуск расчетов осуществлялся с помощью динамического планировщика, использующего библиотеку MPI. На каждом процессорном ядре запускался отдельный расчет непрерывного и дискретного спектра, занимающий по времени около минуты.

Перечень публикаций, содержащих результаты работы

1. I. S. Chekhovskoy, S. B. Medvedev, I. A. Vaseva, E. V. Sedov, M. P. Fedoruk, "Introducing phase jump tracking - a fast method for eigenvalue evaluation of the direct Zakharov-Shabat problem," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* **96**, 105718 (2021). <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2021.105718>
2. Чеховской И.С., Седов Е.В., Штырина О.В. Оконной метод обработки сигналов с помощью нелинейного преобразования Фурье // Всероссийская конференция по волоконной оптике (ВКВО), Пермь, 2023 г.
3. Чеховской И.С., Седов Е.В., Васева И.А., Качулин Д.И., Медведев С.Б., Федорук М.П., Турицын С.К. Волоконно-оптические коммуникации с использованием нелинейного преобразования Фурье // Всероссийская конференция по волоконной оптике (ВКВО), Пермь, 2023 г
4. Egor Sedov and Igor Chekhovskoy "Next-generation signal processing using windowed nonlinear Fourier transform", *Proc. SPIE 13004, Nonlinear Optics and its Applications* 2024, 130040Z (20 June 2024); <https://doi.org/10.1117/12.3022429>