

## **Численные схемы с расщеплением для решения уравнения Гинзбурга-Ландау с насыщением усиления и кубической синхронизацией мод.**

Штырина Ольга Владимировна, к.ф.-м.н., старший научный сотрудник ЛМУФ ММФ НГУ,  
Лобасенко Роман Борисович, к.т.н., ведущий инженер ЛМУФ ММФ НГУ,  
Васева Ирина Аркадьевна, к.ф.-м.н., ведущий инженер ЛМУФ ММФ НГУ,  
Медведев Сергей Борисович, д.ф.-м.н., ведущий инженер ЛМУФ ММФ НГУ,  
Паасонен Виктор Иванович, к.ф.-м.н., старший научный сотрудник ЛМУФ ММФ НГУ,  
Федорук Михаил Петрович, академик РАН, д.ф.-м.н., ректор НГУ.

**Аннотация:** Общие характеристики оптического сигнала, как результата генерации в резонаторе, могут быть описаны при помощи динамической модели, основанной на комплексном кубическом уравнении Гинзбурга-Ландау, учитывающем насыщенное усиление и диссипативные члены, отвечающие за распределенное действие различных внутрирезонаторных устройств. В работе предложены две новые эффективные модификации метода расщепления по физическим процессам для численного решения уравнений данного типа. Численные эксперименты показали, что новые схемы позволяют получить второй порядок аппроксимации по эволюционной переменной, в отличие от классической схемы, которая обеспечивает только первый порядок аппроксимации.

В настоящее время востребованы теоретические исследования, направленные на построение новых математических моделей, применимых для описания работы практически значимых устройств и нелинейных систем. В области разработки численных алгоритмов, предназначенных для моделирования распространения оптического сигнала, требуется проведение исследований по возможности учета дополнительных физических эффектов в оптических волокнах, что позволит в дальнейшем получить новые результаты в прикладных задачах. Актуальны вопросы, связанные с численным моделированием лазерных систем на основе оптических световодов: оптимизация расположения компонент, учет потерь и усиления в волокне при моделировании резонатора лазера. Расчеты по данному направлению требуют задействования значительных вычислительных мощностей и оптимизированных программных комплексов, что приводит к необходимости совершенствования численных алгоритмов для моделирования динамики сигнала в оптических системах.

Актуальность разработки новых эффективных численных алгоритмов для уравнений типа Гинзбурга-Ландау на основе Фурье метода расщепления по физическим процессам обусловлена, например, необходимостью численно исследовать генерацию волоконных лазеров. Для оптимизации таких лазерных систем необходимо определить зависимость свойств выходного оптического сигнала от параметров лазера. Для этой цели обычно применяют численное моделирование, которое позволяет существенно сузить области поиска оптимальных параметров непосредственно при сборке лазера. Ключевой проблемой при численном исследовании свойств и оптимизации лазерной генерации является большое время, затрачиваемое на проведение расчетов в силу многократного повторения обхода резонатора и количества независимых параметров изучаемой лазерной системы.

В работе представлены разработанные эффективные численные алгоритмы для моделирования динамики оптического сигнала в кубическом уравнении Гинзбурга-Ландау с неравномерным спектром насыщенного усиления. Их особенностью является возможность учета синхронизации мод, линейных потерь и насыщенного усиления в волокне. Поскольку в дальнейшем планируется моделирование световодов с формирующимся нелинейным сигналом, предпочтение было отдано разработке алгоритма на основе Фурье метода расщепления по физическим процессам, а не применению компактных разностных схем повышенного порядка точности.

Для описания основных характеристик импульса в волоконном лазере используется распределенная модель, полученная на основе комплексного кубического уравнения типа Гинзбурга-Ландау (ГЛ) и представляющая собой модель лазерного резонатора с учетом влияния дисперсии, нелинейности, спектральной фильтрации, ненасыщенных потерь и насыщенного усиления, а также кубического насыщающегося поглотителя, выступающего в роли устройства пассивной синхронизации мод. Данная динамическая модель включает в себя все основные члены, отвечающие за распределенное действие различных внутрирезонаторных устройств:

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -i \frac{\beta L}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + i \gamma L |A|^2 A + \sigma A + \xi \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \frac{\kappa}{P_{SAM}} |A|^2 A$$

где  $A(z, t)$  – огибающая электромагнитного поля,  $t$  – временная переменная,  $z$  – эволюционная пространственная переменная, нормированная на длину резонатора  $L = L_A + L_P$ ,  $\beta L$  – хроматическая дисперсия за проход,  $\gamma L$  – нелинейность за проход,  $\kappa$  – глубина модуляции насыщающегося поглотителя (SAM),  $P_{SAM}$  – мощность насыщения,  $\xi$  – коэффициент спектральной фильтрации. Параметр  $\sigma$  определяет разность между насыщенным усилением сигнала и ненасыщенными потерями за один проход резонатора

$$\sigma = \frac{g_s}{2} - \frac{\alpha}{2} - \kappa, \quad g_s = \frac{g_A L_A}{1 + E/E_{sat}}, \quad \xi = \frac{g_s}{\Omega_g^2},$$

где  $g_s$  – насыщенное усиление,  $g_A L_A$  – ненасыщенное усиление в активном волокне за проход,  $E_{SAT}$  – энергия насыщения,  $\alpha = \alpha_p L_p + \delta$  – линейные потери в пассивном волокне за проход и усредненные потери на ответвителе  $\delta$ .

Уравнение ГЛ является нелинейным уравнением в частных производных, которое в общем случае нельзя решить аналитически. Одним из наиболее широко используемых методов численного решения таких уравнений является Фурье метод расщепления по физическим процессам. Как правило, используется расщепление на линейный и нелинейный шаги и применяется разложение Стрэнга, позволяющее получить второй порядок точности по шагу  $dz$ . В уравнении ГЛ присутствуют дополнительные члены помимо дисперсии и нелинейности, действие которых также необходимо учесть при численном решении. Дополнительную сложность представляет тот факт, что в коэффициенты уравнения входят члены, зависящие от энергии поля. В работе предложены модификации метода расщепления по физическим процессам для численного решения уравнения ГЛ, учитывающие эволюцию энергии. Анализ численных схем проведён на основе сравнения численного решения уравнения ГЛ с аналитическим стационарным решением.

Далее остановимся подробно на особенностях разработанных численных алгоритмов. В стандартном Фурье методе расщепления по физическим процессам, применяемом к консервативному нелинейному уравнению Шредингера (НУШ), расщепление эволюционного оператора производится следующим образом: линейные эффекты и влияние дисперсии в волокне выделяются в линейный оператор, а действие керровской нелинейности учитывается отдельно в нелинейном операторе. При учете в неконсервативном НУШ насыщенного усиления и потерь на первый взгляд кажется очевидным, что эти члены необходимо учитывать совместно дисперсионном шаге, в силу линейности этих членов. Однако в таком случае нельзя получить явное аналитическое выражение для изменения мощности сигнала, и на каждом шаге по эволюционной переменной необходимо численно, с применением итерационного метода решать трансцендентное уравнение для нахождения коэффициента усиления сигнала, что может привести к серьезным временным затратам. Также для сохранения "бесконечного" порядка аппроксимации по времени при выполнении дисперсионного шага нельзя отказаться от применения преобразования Фурье для вычисления второй производной по

времени. В силу всего вышеизложенного возникла необходимость в разработке модифицированного численного Фурье метода расщепления, позволяющего выразить действие каждого из операторов расщепления на пространственном шаге аналитически и явным образом.

При численном моделировании задачи о распространении импульса в нелинейной среде с дисперсией основным методом является классический Фурье-метод расщепления по физическим процессам

$$\frac{\partial A}{\partial z} = (\bar{D} + \bar{N})A,$$

где  $\bar{D}$  – линейный оператор, учитывающий дисперсию,  $\bar{N}$  – нелинейный оператор, описывающий действие нелинейных эффектов. Предполагается, что при распространении импульса на малое расстояние от  $z$  до  $z + \Delta z$  дисперсионные и нелинейные эффекты действуют независимо друг от друга.

Традиционно в методе расщепления используется расщепление Стренга:

$$A(z + \Delta z, t) = \exp\left(\frac{\Delta z}{2} \bar{D}\right) \exp(\Delta z \bar{N}) \exp\left(\frac{\Delta z}{2} \bar{D}\right) A(z, t).$$

В более общем виде расщепление на два оператора с использованием двух стадий записывается в виде:

$$A(z + \Delta z, t) = \exp(b_2 \Delta z \bar{D}) \exp(a_2 \Delta z \bar{N}) \exp(b_1 \Delta z \bar{D}) \exp(a_1 \Delta z \bar{N}) A(z, t).$$

Наилучшую точность среди схем второго порядка с двухстадийным расщеплением для действительных коэффициентов даёт схема при

$$a_1 = 1 - \sqrt{2}/2, a_2 = \sqrt{2}/2, b_1 = a_2, b_2 = a_1.$$

Расщепление с использованием коэффициентов будем называть схемой best2 и далее будем рассматривать сравнение этой схемы с расщеплением Стренга. Возможно получение более высокого порядка аппроксимации за счет увеличения количества этапов расщепления, однако, это приведет к увеличению времени расчета.

Далее рассмотрим применение метода расщепления по физическим процессам для уравнения ГЛ с различными способами учета изменения энергии.

Наиболее естественным образом расщепить уравнение ГЛ по физическим процессам можно, если в оператор  $\bar{D}$  внести члены уравнения, отвечающие за дисперсию, накачку, диссипацию и фильтрацию, а в операторе  $\bar{N}$  оставить нелинейные слагаемые. В результате получим:

1. линейный шаг:

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -i \frac{\beta L}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \sigma A + \xi \frac{\partial^2 A}{\partial t^2},$$

2. нелинейный шаг:

$$\frac{\partial A}{\partial z} = i\gamma L |A|^2 A + \frac{\kappa}{P_{SAM}} |A|^2 A,$$

В спектральной области уравнение примет вид

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \left(i \frac{\beta L}{2} - \xi\right) \omega^2 A + \sigma A.$$

Используя для определения коэффициентов  $\xi$  и  $\sigma$  их значения с предыдущего шага, легко проинтегрировать уравнение и получить решение на линейном шаге:

$$\hat{A}(z + \delta z, \omega) = \exp\left[\left(i \frac{\beta L}{2} - \xi\right) \omega^2 \delta z + \sigma \delta z\right] \hat{A}(z, \omega).$$

Представив поле в виде  $A(z, t) = \sqrt{P(z, t)} \exp[i\phi(z, t)]$ , получаем решение на нелинейном шаге

$$A(z + \delta z) = A(z) \left( 1 - 2 \frac{\kappa}{P_{SAM}} \delta z P(z) \right)^{(1+iyLP_{SAM}/\kappa)/2}.$$

Для разработки модифицированной схемы расщепления уравнения ГЛ, позволяющей точнее выразить действие каждого из операторов расщепления на эволюционном шаге аналитически и явным образом, было предложено: насыщенное усиление и спектральную фильтрацию учитывать на дисперсионном шаге, а потери и насыщенное поглощение – на нелинейном. Кроме того, в дисперсионный оператор был добавлен дополнительный линейный член с коэффициентом  $g_A L_A / 2$  с последующей компенсацией его воздействия при выполнении нелинейного шага. Это сделано для того, чтобы при прямом интегрировании дифференциальных уравнений после расщепления получилось явное аналитическое выражение для выполнения одного пространственного шага интегрирования:

1. линейный шаг:

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -\frac{i\beta L}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \frac{g_s}{2\Omega_g^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \left( \frac{g_s}{2} + \frac{g_A L_A}{2} \right) A,$$

2. нелинейный шаг:

$$\frac{\partial A}{\partial z} = ia(|A|^2)LA - \left( \frac{g_A L_A}{2} + \frac{\alpha}{2} + \kappa \right) A + \frac{\kappa}{P_{SAM}} |A|^2 A,$$

где уравнение скорректировано на линейный член с коэффициентом  $g_A L_A / 2$ .

В спектральной области уравнение **Ошибка! Источник ссылки не найден.** примет вид

$$\frac{\partial \hat{A}(\omega)}{\partial z} = \left( i \frac{\beta L}{2} - \frac{g_s}{2\Omega_g^2} \right) \omega^2 \hat{A}(\omega) + \left( \frac{g_s}{2} + \frac{g_A L_A}{2} \right) \hat{A}(\omega).$$

Выпишем для этого уравнения приближенное к балансному

$$\frac{dE}{dz} = \left( \frac{g_A L_A}{1 + E/E_{sat}} + g_A L_A \right) E,$$

его решение

$$E(z + \delta z) = \sqrt{E_{sat}^2 + E(z)[E(z) + 2E_{sat}] \exp(2g_A L_A \delta z) - E_{sat}},$$

где  $\delta z$  – шаг данной стадии метода расщепления. Анализ уравнения вида (15) с различными коэффициентами показал, что только при равных значениях множителей при линейном и нелинейном членах возможно выписать аналитическое решение в явном виде с помощью элементарных функций. Другими словами, решение уравнения типа насыщения энергии может быть записано явно только при равенстве усиления по малому сигналу и коэффициента линейного усиления. Таким образом, при предложенном методе расщепления исходного уравнения нет необходимости численно с помощью итерационного алгоритма решать трансцендентное уравнение для нахождения коэффициента усиления сигнала на каждом пространственном шаге.

Учитывая выражение для  $g_s$  получаем решение для линейного шага в спектральной области:

$$\hat{A}(z + \delta z, \omega) = \left( \frac{E(z + \delta z)}{E(z)} \right)^{\frac{1-\omega^2/\Omega_g^2}{2}} \exp \left( i \frac{\beta L \omega^2}{2} \delta z + \frac{g_A L_A \omega^2}{2\Omega_g^2} \delta z \right) \hat{A}(z, \omega).$$

Для решения уравнения представим поле в виде  $A(z, t) = \sqrt{P(z, t)} \exp[i\phi(z, t)]$  и получим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{2\kappa}{P_{SAM}} P^2 - \eta P \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} = \gamma L P, \end{cases}$$

где  $\eta = g_A L_A + \alpha + 2\kappa$ . В результате находим решение для нелинейного шага модифицированной схемы:

$$P(z + \delta z) = \frac{P(z) \exp(-\eta \delta z)}{1 - 2\kappa [1 - \exp(-\eta \delta z)] P(z) / [\eta P_{SAM}]'}$$

$$A(z + \delta z) = \frac{1}{2} \gamma L \frac{P_{SAM}}{\kappa} \ln \left( \frac{2\kappa P(z + \delta z) - \eta P_{SAM}}{2\kappa P(z) - \eta P_{SAM}} \right) A(z).$$

Полученное аналитическое выражение для численного интегрирования преобразовано и записано рекуррентно, чтобы в процессе проведения расчетов не требовалось выделять фазу сигнала, поскольку при распространении возможно обнуление мощности сигнала в отдельных временных узлах.

Используем такое же расщепление по физическим процессам, как в классической схеме, но постараемся более точно учесть эволюцию энергии в коэффициентах уравнения  $\xi$  и  $\sigma$ . При этом решение на нелинейном шаге останется прежним, а решение линейного шага в спектральной области можно записать следующим образом:

$$\hat{A}(z + \delta z, \omega) = \hat{A}(z, \omega) \exp[\theta(z, \delta z, \omega)],$$

$$\begin{aligned} \theta(z, \delta z, \omega) &= \int_z^{z+\delta z} \left[ \left( i \frac{\beta L}{2} - \xi \right) \omega^2 + \sigma \right] dz' = \\ &= \left( i \frac{\beta L}{2} \omega^2 - \frac{\alpha}{2} - \kappa \right) \delta z + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\omega^2}{\Omega_g^2} \right) \int_z^{z+\delta z} g_s [E(z')] dz'. \end{aligned}$$

Далее необходимо найти значение интеграла от функции  $g_s$ , зависящей от энергии.

Построим ряд Тейлора функции  $E(z)$  в точке  $z$

$$E(z + \delta z) = E(z) + \delta z E'(z) + \frac{\delta z^2}{2} E''(z) + O(\delta z^3).$$

Из **Ошибка! Источник ссылки не найден.** получим уравнение на мощность  $P = |A|^2$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = 2\sigma P - \frac{g_s}{\Omega_g^2} \omega^2 P.$$

Умножив уравнение на  $\omega^{2n}$  и проинтегрировав по  $\omega$ , получим цепочку уравнений для моментов  $M_n = \int \omega^{2n} P d\omega$

$$M'_n = 2\sigma M_n - \frac{g_s}{\Omega_g^2} M_{n+1}, \quad E \equiv M_0,$$

где штрих означает производную по  $z$ . Эта цепочка уравнений позволяет достаточно просто находить выражения для производных от  $E$ , которые присутствуют в разложении Тейлора.

Действительно, последовательно находим значения производных

$$E' = 2\sigma E - \frac{g_s}{\Omega_g^2} M_1,$$

$$E'' = 2E \frac{d\sigma}{dE} E' + 2\sigma E' - \frac{1}{\Omega_g^2} \frac{dg_s}{dE} E' M_1 - \frac{g_s}{\Omega_g^2} M_1'.$$

Таким образом для вычисления  $n$ -той производной от  $E$  необходимо вычислить все моменты  $M_k$  от 0 до  $n$ . Также легко вычисляются производные

$$\frac{d\sigma}{dE} = \frac{1}{2} \frac{dg_s}{dE} \frac{dg_s}{dE} = \frac{-g_s^2}{g_A L_A E_{stat}}.$$

Зная производные от энергии находим значение интеграла в с нужной точностью:

$$\int_z^{z+\delta z} g_s[E(z')] dz' = g_s[E(z)] + \frac{1}{2} \frac{dg_s}{dE} E'(z) \delta z^2 + O(\delta z^3).$$

Нелинейный шаг в схеме с моментами остаётся таким же, как в классической схеме.

Расчеты проводились для следующих значений параметров:  $\beta L = 1$ ,  $\gamma L = 1$ ,  $g_A L_A = 5$ ,  $\alpha_P L_P = 1$ ,  $\kappa = 0.1$ ,  $\delta = \ln(0.7)$ ,  $E_{SAT} = 0.721$ ,  $P_{SAM} = 0.1$ ,  $\Omega_g^2 = 1000$ . Начальный импульс задавался в виде  $A(z = 0, t) = 0.1 \operatorname{sech}(0.025t)$ .

Стационарное решение уравнения принадлежит семейству чирпованных гиперболических секансов:

$$A(z, t) = a[\operatorname{sech}(\tau t)]^{1+ic} \exp(i\phi z).$$

Значения аналитического стационарного решения для данного набора параметров:  $a = 0.452$ ,  $\tau = 0.197$ ,  $C = -3.555$ ,  $E_{stat} = 2.084$ . Коэффициент спектральной фильтрации  $\xi = 0.00064$  и параметр  $\sigma = -0.136$  определялись итерационным процессом на установление энергии.

Численные эксперименты проводились для классической схемы, обозначенной на рисунках как simple, модифицированной схемы, обозначенной как modified, и схемы с моментами, обозначенной как moments. Буквой S на рисунках маркированы схемы с использованием расщепления Стренга, буква B соответствует расщеплению best2.

Модифицированная схема (modified) и схема с моментами (moments) обеспечивают второй порядок аппроксимации, в то время как классическая схема (simple) – только первый. Это приводит к значительному отличию в точности схем на мелких сетках. Первый порядок классической схемы объясняется слишком грубым учетом эволюции энергии.

Для сравнительной иллюстрации работы представленных алгоритмов с точки зрения их точности на рисунках 1 и 2 представлена эволюция энергии по  $z$  до выхода на стационар, а также погрешности вычисления энергии в стационарном режиме. Результаты, представленные на рисунках, получены на равномерной сетке с шагом  $dt = 0.5$  и шагом по эволюционной переменной  $dz = 0.01$  на рисунке 1 и  $dz = 0.000625$  на рисунке 2.

Классическая схема (simple) даёт высокую погрешность (порядка  $10^{-2} - 10^{-4}$ ) при вычислении стационарной энергии независимо от выбора расщепления. Модифицированная схема (modified) позволяет получить погрешность вычисления энергии порядка  $10^{-3} - 10^{-6}$ . Использование расщепления best2 в модифицированной схеме на порядок улучшает результат, полученный с помощью классической схемы, на грубой сетке (рисунок 1) и более чем на два порядка на мелкой сетке (рисунок 2). Наименьшая погрешность вычисления стационарной энергии (порядка  $10^{-6} - 10^{-8}$ ) получена для схемы с моментами (moments). При этом использование расщепления best2 позволяет незначительно улучшить результат.

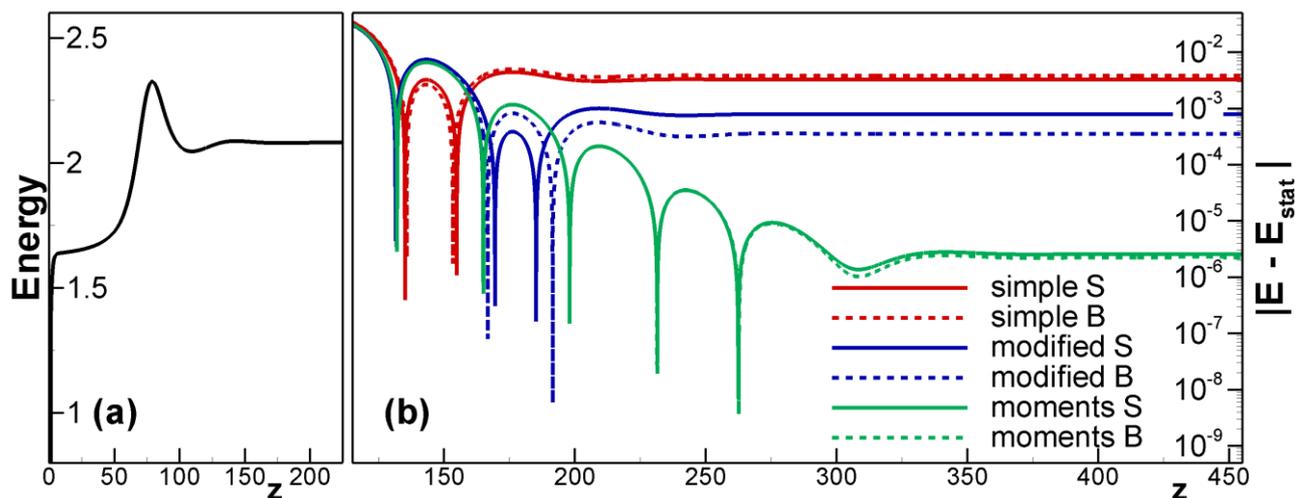


Рисунок 1 – (а) Эволюция энергии к стационарной; (b) динамика погрешностей вычисления энергии, полученных на грубой сетке шестью различными методами, при выходе на стационар

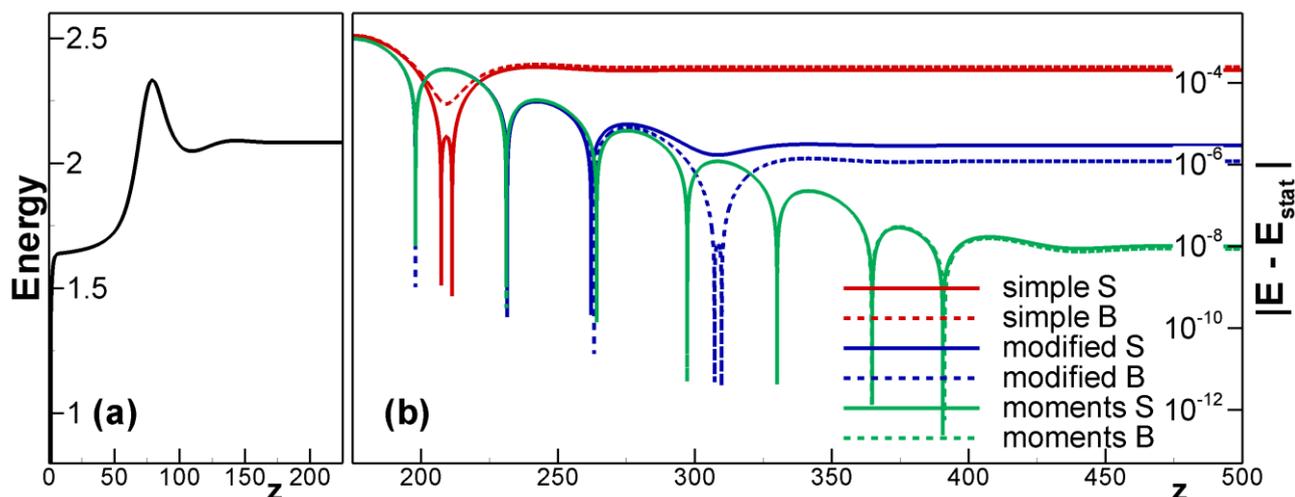


Рисунок 2 – (а) Эволюция энергии к стационарной; (b) динамика погрешностей вычисления энергии, полученных на мелкой сетке шестью различными методами, при выходе на стационар

Разработаны обобщенные эффективные численные алгоритмы для моделирования динамики оптического сигнала в волоконных световодах. Методы были обобщены для решения уравнения Гинзбурга-Ландау с учётом воздействия на оптический сигнал устройств пассивной синхронизации мод одновременно с насыщенным усилением и линейными потерями в волокне. Предложенный способ разделения физических процессов, воздействующих на оптический сигнал при распространении в волокне, в модифицированной схеме позволил выразить действие как нелинейного, так и дисперсионного пространственных шагов явными аналитическими выражениями. Кроме того, совместное воздействие нелинейности и насыщающегося поглотителя было представлено явным образом, что позволило ускорить вычислительный алгоритм без потери точности расчета. Схема с моментами, сохраняя способ разделения физических процессов классической схемы, позволила значительно повысить точность вычислений за счет более точного учета эволюции энергии в коэффициентах уравнения. Особенно полезно повышение точности будет для уравнений с переменными коэффициентами, для которых правильное описание эволюции энергии еще более важно. Численные эксперименты показали, что новые схемы позволяют получить второй порядок аппроксимации по эволюционной переменной, в отличие от классической схемы, которая обеспечивает только первый порядок аппроксимации.

Таким образом, предложенные модификации метода расщепления по физическим процессам с учетом эволюции энергии позволяют значительно увеличить точность решения комплексного кубического уравнения Гинзбурга–Ландау. Наилучшее приближение к аналитическому стационарному решению даёт схема с моментами, использующая расщепление best2.

Результаты представленной работы опубликованы Medvedev, S.B., Shtyrina, O.V., Vaseva, I.A. *et al.* Numerical Splitting Schemes for Solving the Ginzburg–Landau Equation with Saturated Gain and Cubic Mode Locked. *Bull. Lebedev Phys. Inst.* **50** (Suppl 13), S1484–S1491 (2023). <https://doi.org/10.3103/S1068335623602443>.

Работа выполняется при поддержке гранта РФФ 20-11-20040 "Математическое моделирование и численные методы решения современных проблем нелинейной оптики и фотоники" (2020-2024 гг, руководитель Федорук М.П.), а также в рамках Госзадания FSUS-2020-0034 "Вычислительные алгоритмы и математическое моделирование нелинейных оптических систем и нелинейной обработки сигналов" (2020-2024 гг, руководитель Штырина О.В.).