

Отчет о проделанной работе с использованием оборудования ИВЦ НГУ

за период 01.04.2023-31.03.2025 г.

**Тема работы.** Ускорение сходимости неявных схем для решения уравнений Навье-Стокса с использованием алгебраического многосеточного метода

### **Состав коллектива**

1. Чирков Денис Владимирович, Институт теплофизики СО РАН, с.н.с., к.ф.-м.н, chirkov.itp@gmail.com (руководитель);
2. Рогачева Анна Константиновна, Институт теплофизики СО РАН, инженер;
3. Кочарина Алена Романовна, Институт теплофизики СО РАН, инженер-исследователь.

### **Информация о гранте**

Грант РФФИ №25-21-00195 «Численные методы и алгоритмы оптимизационного проектирования рабочих колес перспективных гидротурбин, устойчиво работающих в широком диапазоне режимов» (руководитель Д.В. Чирков).

### **Научное содержание работы**

#### **1. Постановка задачи**

**Цель работы** состоит в ускорении сходимости итераций в методе искусственной сжимаемости для решения уравнений Навье-Стокса.

В разработанном авторами пакете CADRUN для численного моделирования течений жидкости в сложных проточных частях (гидротурбины, насосы, и т.д.) используется неявный метод конечных объемов, решающий уравнения Навье-Стокса несжимаемой жидкости. Для решения нестационарных задач во все уравнения системы добавляются производные по псевдовремени. Решение на каждом шаге по физическому времени находится установлением итераций по псевдовремени. Неявная по псевдовремени схема линеаризуется и сводится к СЛАУ вида  $Ax=b$  с большой разреженной матрицей  $A$ . В реальных задачах размерность матрицы составляет порядка нескольких миллионов строк ( $4*N$ , где  $N$  – число ячеек расчетной сетки). В настоящее время для решения этой СЛАУ используется метод приближенной LU-факторизации (1 шаг метода Гаусса-Зейделя) с явной реализацией граничных условий. В результате для получения сошедшегося решения на каждом шаге по физическому времени требуется порядка 1 тысячи итераций, за счет чего нестационарный расчет на кластере требует 50-400 часов в зависимости от задачи. Для проведения серийных нестационарных расчетов крайне актуально ускорение сходимости алгоритма.

**Для достижения цели** в качестве альтернативного способа решения разреженной СЛАУ предлагается выбрать метод GMRES с алгебраическим многосеточным предобуславливателем и с ILU-предобуславливателем, реализованные в библиотеке

HYPRE [1]. При составлении система  $Ax=b$  предлагается также учесть граничные условия на всех границах расчетной области (неявная реализация граничных условий).

## 2. Современное состояние проблемы

В настоящее время алгебраические многосеточные методы являются наиболее эффективными итерационными алгоритмами для решения больших разреженных СЛАУ, возникающих в результате дискретизации уравнений в частных производных.

1. HYPRE User's Manual. Lawrence Livermore National Laboratory, 2024, [hypre.readthedocs.io/\\_/downloads/en/latest/pdf/](https://hypre.readthedocs.io/_/downloads/en/latest/pdf/)

## 3. Подробное описание работы, включая используемые алгоритмы

Методы из HYPRE были интегрированы в комплекс CADRUN и протестированы на трех задачах: задаче стационарного обтекания цилиндра, нестационарного обтекания цилиндра и течения в отсасывающей трубе гидротурбины.

### 3.1. Стационарное обтекание цилиндра

В этой задаче для получения сошедшегося решения с использованием базового метода LU-факторизация потребовалось 1 803 итерации и 24 секунды. Результаты расчетов с использованием алгебраического метода из HYPRE приведены в таблице 1. В ней рассматриваются результаты расчетов при двух разных предобуславливателях (BoomerAMG и ILU(1)) и разных значениях точности (tolerance). В качестве солвера был выбран итерационный метод GMRES. Из таблицы 1 следует, что самый лучший результат был получен при использовании ILU(1) в качестве предобуславливателя, со значением tolerance равным  $10^{-1}$ . Данный расчет потребовал 39 итераций и занял 3 секунды, что в 8 раз быстрее базового метода LU-факторизации. Таким образом, на данной задаче цель по ускорению сходимости была достигнута.

Таблица 1. Сравнение результатов для методов из HYPRE.  
Стационарное обтекание цилиндра с  $Re=40$ .

№ теста	precond	tol	кол-во итераций, необходимых для получения сошедшегося решения	время расчета
1	BoomerAMG	$10^{-6}$	31	31 с
2		$10^{-3}$	31	11 с
3		$10^{-2}$	31	6 с
4		$10^{-1}$	35	4 с
5	ILU(1)	$10^{-6}$	34	6 с
6		$10^{-3}$	34	4 с
7		$10^{-2}$	35	3 с
6		$10^{-1}$	39	3 с

### 3.2. Нестационарное обтекание цилиндра

Рассмотрена задача нестационарного обтекания цилиндра с числом Рейнольдса  $Re=100$ . В таблице 2 приведены результаты расчетов с использованием методов из HYPRE (BoomerAMG + GMRES и ILU(1) + GMRES), а также базового метода LU-факторизации при различных значениях шага по физическому времени  $\Delta t$  и шага по псевдовремени  $\Delta \tau$ . Из таблицы 2 следует, что нам удалось найти параметры, при которых метод HYPRE считает быстрее, чем LU-факторизация.

Таблица 2. Сравнение результатов расчетов (с 500 по 600 шаг по физическому времени)

метод	$\Delta t$	$\Delta \tau$	Число итераций GMRES	Число итераций по $\tau$ на каждом шаге $dt$	time
HYPRE (BoomerAMG + GMRES)	0.5	1	5	68 – 18	4 м 57 с
HYPRE (ILU(1)+ GMRES)	0.5	1	5	69 – 20	9 м 20 с
LU	0.5	1	-	335 – 180	4 м 51 с
HYPRE (BoomerAMG + GMRES)	0.1	5	8	80 – 13	2 м 17 с
HYPRE (ILU(1)+ GMRES)	0.1	5	10	51 – 11	3 м 8 с
LU	0.1	5	-	1 080 – 260	6 м 42 с

### 3.3. Течение в отсасывающей трубе

Далее рассмотрено нестационарное течение в отсасывающей трубе гидротурбины. Нестационарность течения проявляется в формировании вращающегося вихревого жгута в конусе отсасывающей трубы. Сетка для расчетов показана на рис. 1.

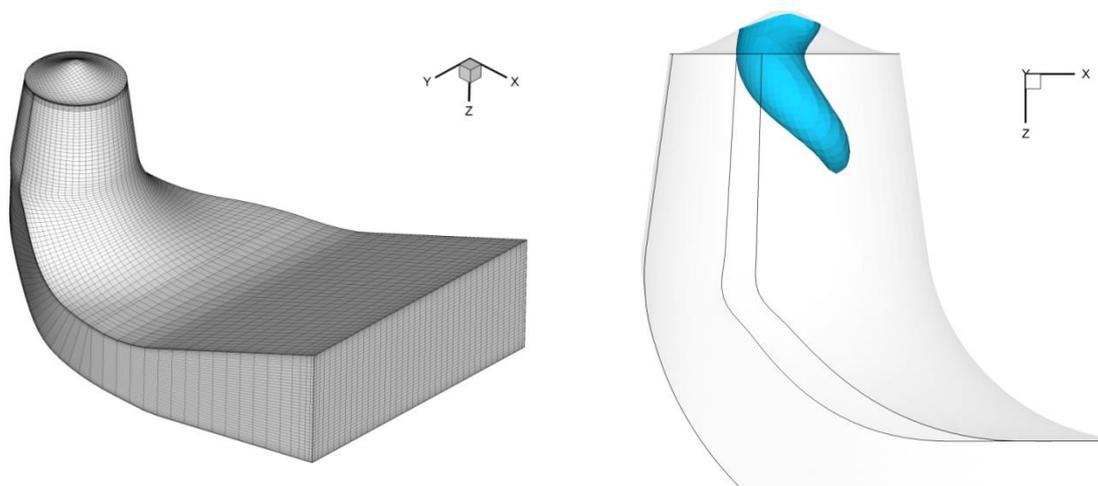


Рис 1. Сетка и вихревой жгут в отсасывающей трубе, визуализированный изоповерхностью давления  $p = 12,24$  м.в.ст.

Было проведено порядка 12 расчетов, которые позволили выявить параметры, при которых решение сходилось быстрее всего. Лучшие результаты приведены в таблице 3. Из таблицы 3 следует, что удалось ускорить метод искусственной сжимаемости в 4 раза. На рисунке 2 показана эволюция потерь в отсасывающей трубе, найденные различными методами. Совпадение результатов расчетов после примерно 200 шагов по времени показывает правомерность использования сравнительно низкой точности решения СЛАУ ( $tol=10^{-2}$  или даже  $10^{-1}$ ), а также ограничения в 10 или 15 итераций по псевдовремени на каждом шаге по  $t$ .

Таблица 3.

метод	iter_max	время на 1 шаг по времени	время на весь расчет (2765 шагов dt)
LU	1 000	4-5 с	236 ч 21 м 6 с
HYPRE (BoomerAMG + GMRES), $tol = 10^{-2}$	10	1-2 с	53 ч 24 м 13 с
HYPRE (ILU(1) + GMRES) , $tol = 10^{-2}$	15	1-2 с	54 ч 01 м 38 с

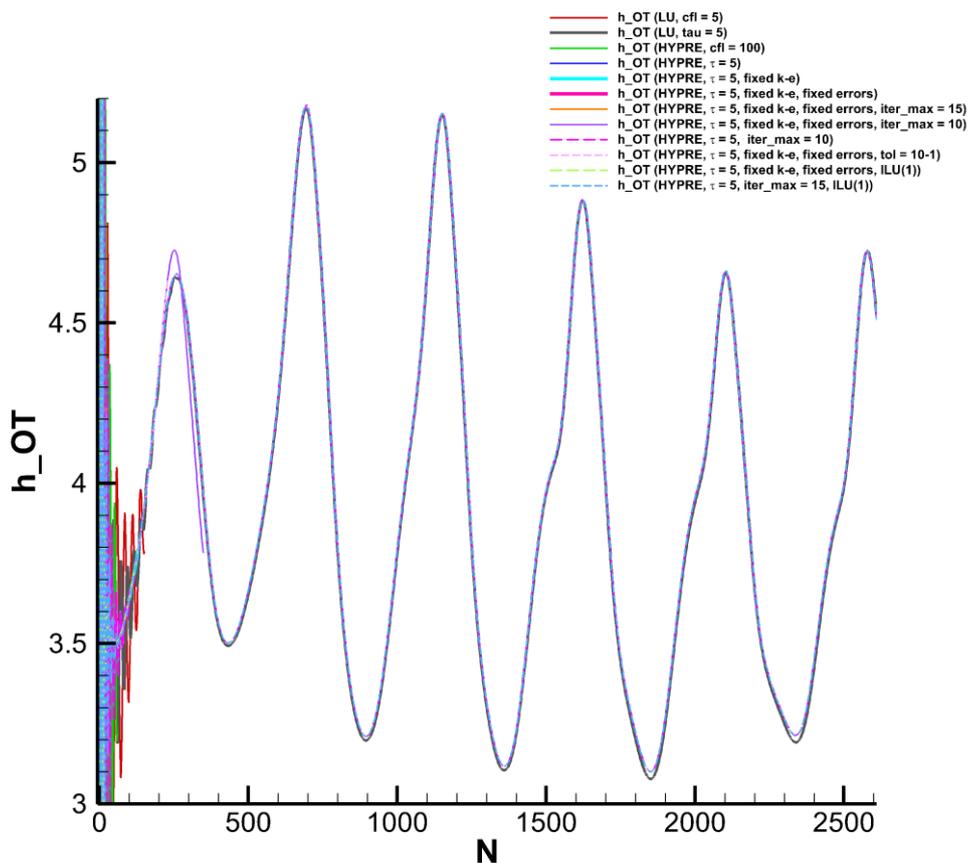


Рис 2. Эволюция потерь энергии в ОТ ( $h_{OT}$ ) во времени, полученные в расчетах с использованием разных методов и настроечных параметров.

### **Эффект от использования кластера в достижении целей работы.**

Кластер предоставляет возможность работы с библиотекой HYPRE, предназначенной для решения больших систем линейных уравнений. Данная библиотека функционирует под управлением ОС Linux и позволяет проводить расчеты в параллельном режиме.

В данный момент идет тестирование программы, где расчетная область состоит из нескольких блоков. Для распараллеливания счета каждому процессу кластера дается свой набор блоков. За счет распараллеливания счета на десятки ядер вычислительного кластера существенно сокращается время расчета течения во всей области.

Успешное решение поставленной задачи за приемлемое время возможно лишь с использованием параллельного счета на многопроцессорном кластере.

### **Аннотация**

Исследована возможность ускорения нестационарных расчетов пространственных течений жидкости в пакете CADRUN. В отличие от предыдущих реализаций метода, использующих для решения СЛАУ метод приближенной LU-факторизации, использованы методы GMRES с алгебраическим многосеточным предобуславливателем и ILU-предобуславливателем, реализованные в библиотеке HYPRE. Указанные методы внедрены в параллельную версию пакета CADRUN. Проведены тестовые расчеты, которые показали возможность сокращения времени счета нестационарных задач в 3-4 раза по сравнению с методом LU-факторизации.