

Образование зон с высокими градиентами завихренности и их влияние на энергетический спектр двумерной турбулентности.

Е.А. Кузнецов, Е.В. Серещенко*, А.Н. Кудрявцев

s_evgeniy@yahoo.com, т. 8-913-753-09-66

Решается двумерное уравнение Эйлера с гипервязкостью, с периодическими граничными условиями:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u_x \frac{\partial w}{\partial x} + u_y \frac{\partial w}{\partial y} = (-1)^n \mu_n \nabla^{2n} w, \quad n=3, \quad \mu_n = 10^{-20} \left(\frac{2048}{N} \right)^{2n}$$

Используется псевдо спектральный метод Фурье:

$$\frac{\partial \hat{w}_k}{\partial t} = \hat{f}_k + A_k \hat{w}_k, \quad \hat{f}_k = - \left(u_x \frac{\partial w}{\partial x} + u_y \frac{\partial w}{\partial y} \right), \quad A_k = -\mu_n k^{2n} = -\mu_n (k_x^2 + k_y^2)^n$$

Интегрирование по времени осуществляется схемой Рунге-Кутты/Кранка-Николсона 3-его порядка (RKCN33). Расчеты проводятся на GPU Tesla на сетках 4096x4096 и 8192x8192.

Хорошо известно, что особенности, возникающие в результате нелинейной эволюции в непрерывных средах, продуцируют в коротковолновой области степенные хвосты в спектре турбулентности. Эта идея была использована Филлипсом для нахождения спектра турбулентности волн на воде за счет образования барашков, то есть особенностей поверхности $z=f(x,y,t)$ в виде заострений. В этом случае вторая производная вертикального отклонения поверхности f содержит дельта-функциональные особенности, благодаря чему фурье-образ от f при больших волновых числах падает как k^{-2} . Отсюда, по Филлипсу, спектр $E(k)$ оказывается пропорциональным k^{-3} . Те же самые рассуждения, примененные к двумерной гидродинамической турбулентности, где ожидаемые особенности могут быть связаны с резкими градиентами завихренности, должны были бы привести к распределению $E(k) \sim k^{-3}$, то есть совпадать с точностью до логарифмического фактора со спектром Крейчнана, соответствующим постоянному потоку энтропии. Однако эти простые соображения требуют более внимательного рассмотрения, поскольку особенности неявно предполагались точечными, хотя они являются распределенными, сосредоточенными на линиях. Разница в характере сингулярности, очевидно, должна сказываться и на спектрах турбулентности. В частности, если предположить, что скачки завихренности распределены изотропно, то спектр турбулентности будет сильно отличаться, и как было показано Саффманом, спектр в этом случае будет иметь вид $E(k) \sim k^{-4}$.

Данная работа посвящена установлению связи между хвостами спектра и резкими градиентами завихренности. На рис.1. представлены распределения завихренности в моменты времени - $T=0$ и $T=130$. На рис.2. представлены скомпенсированные энергетические спектры в логарифмическом масштабе, в различные моменты времени. Видно, что энергетический спектр соответствует спектру Крейчнана ($E(k) \sim k^{-3}$).

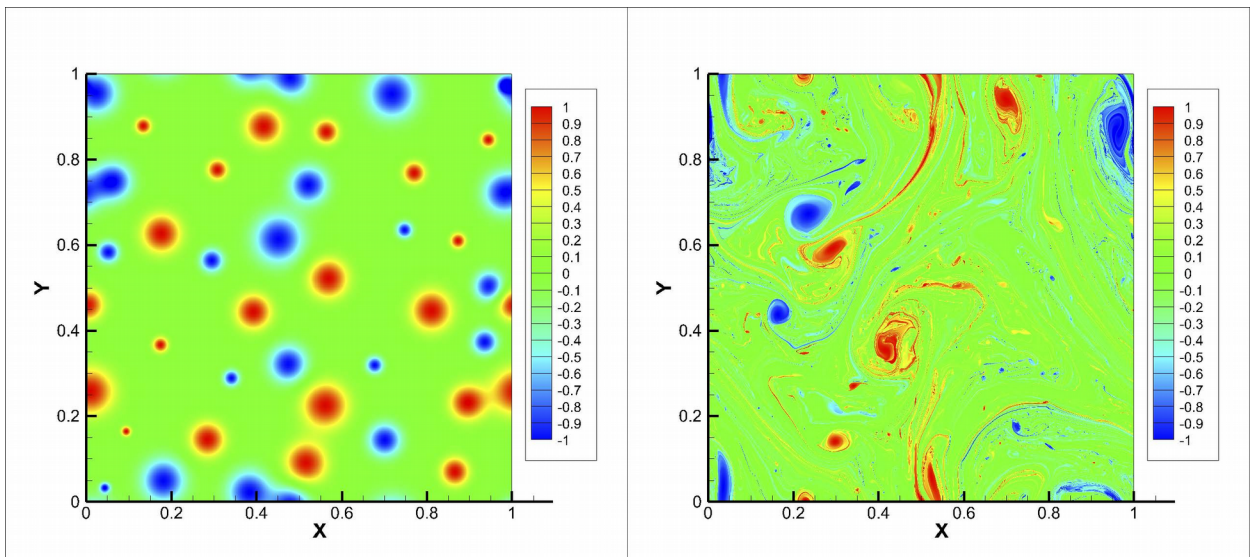


Рис.1. Распределение завихренности.

слева $T=0$, справа $T=130$

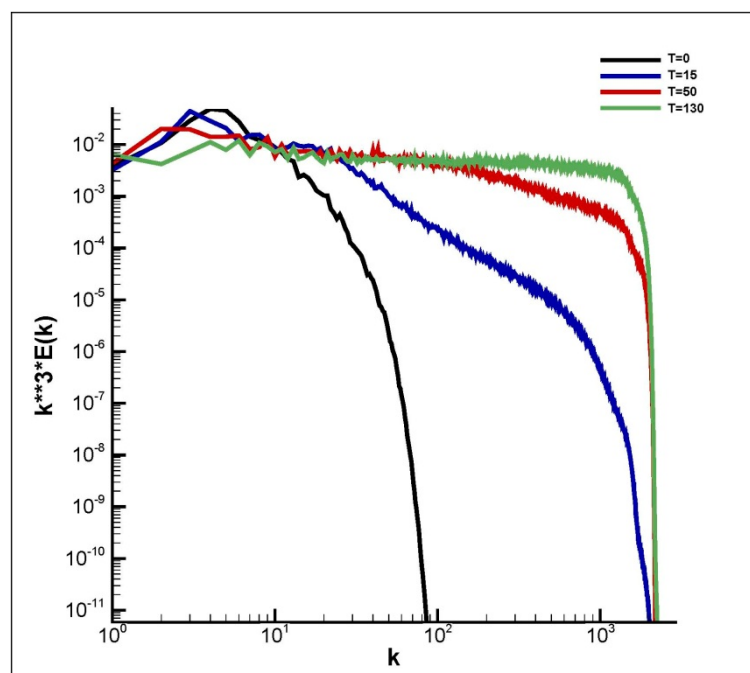


Рис.2. Скомпенсированный спектр в различные моменты времени.

Для определения связи между хвостами спектра и резкими градиентами завихренности использовалась следующая методика. Вначале строилось распределение градиента завихренности (рис.3.а), затем из энергетического спектра удалялась длинноволновая часть ($k < 10$) и заново рассчитывалось распределение градиента завихренности (рис.3.б). Как видно из рисунков, фильтрация спектра по малым k ни каким образом не изменила распределение резких градиентов завихренности. Отсюда можно сделать вывод, что

степенная зависимость спектра связана с образованием больших градиентов завихренности.

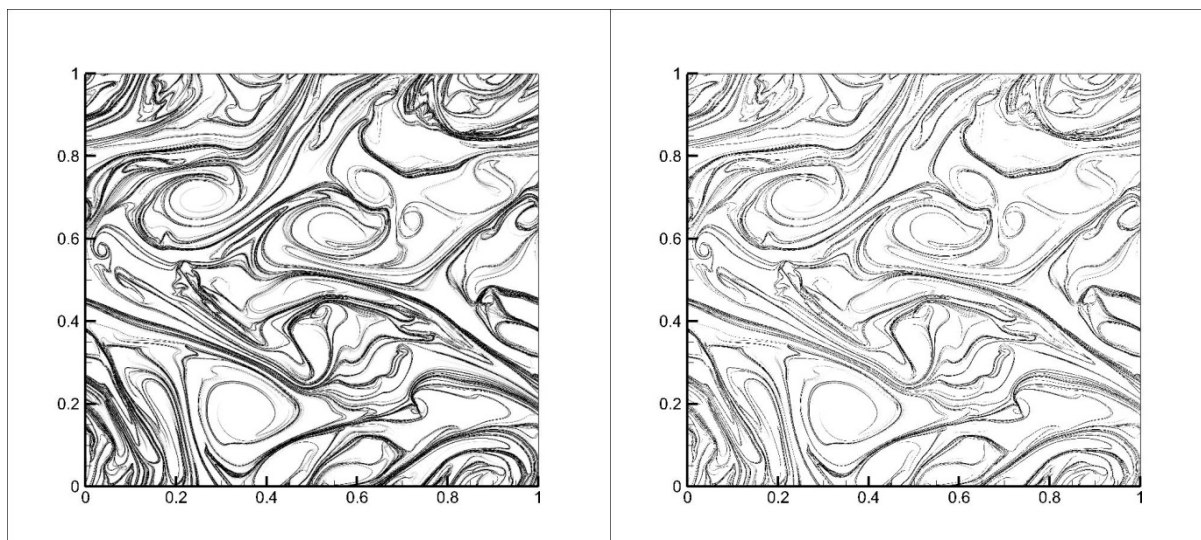


Рис.3. Распределение градиента завихренности при $T=75$.

слева – без фильтрации спектра, справа – с фильтрацией спектра $k < 10$

За счет использования одного GPU Tesla, удалось добиться производительности сравнимой с использованием 64 узлов кластера.