

«НОВОСИБИРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, НГУ)

Кафедра математического моделирования

«Математическое моделирование плазменной неустойчивости на ИВЦ НГУ»

*Выполнила:* студентка 4 курса ММФ НГУ Каргапольцева Елена Сергеевна.

*Научный руководитель:* д.ф.-м.н., член-корр. РАН, с.н.с. ИВМиМГ СО РАН Лазарева Г.Г.

**Цель работы:** определение влияния количества модельных частиц и размера сетки на точность моделирования пучково-плазменного взаимодействия.

Для объяснения природы солнечных вспышек, а также для создания энергетического термоядерного реактора проводится моделирование взаимодействия мощного электронного пучка с высокотемпературной плазмой. Плазма в этом случае является существенно неравновесной, поэтому моделирование необходимо проводить в кинетическом приближении. Наряду с теоретическими методами и натуральными экспериментами, важнейшую роль занимает численное моделирование. Физика плазмы и плазмopodobных сред стала важнейшей областью применения вычислительного эксперимента, в особенности исследование нелинейных процессов, когда теоретические методы сталкиваются с трудностями, а натуральные эксперименты трудоемки, дороги или принципиально невозможны. В таком случае исключительно важен вопрос о точности используемых моделей. Непосредственной целью работы является выяснение влияния количества модельных частиц и размера сетки на точность моделирования пучково-плазменного взаимодействия. Существует большое количество программ, реализующих метод частиц, в частности OOPIC, OSIRIS, VLPL, QuickPIC. Но точность выполняемых ими расчетов не гарантирована, в особенности на тех задачах, на которых эти программы не были протестированы. Вопрос о влиянии параметров метода частиц на точность счета исследовался многими авторами, тем не менее, в общем случае этот вопрос остается открытым.

Для моделирования пучково-плазменного взаимодействия используется система уравнений Власова-Максвелла. Для ее решения создана трехмерная параллельная программа на основе метода «частиц-в-ячейках». Вычисление электромагнитного поля производится методом конечных разностей во временной области. Распараллеливание произведено методом декомпозиции областей. Проведены расчеты по моделированию пучково-плазменной неустойчивости в гидродинамическом режиме, т.е. для большой скорости нарастания возмущения. Исследовано влияние параметров метода частиц на качество получаемого решения, выработаны критерии корректности проводимых расчетов.

Модель высокотемпературной бесстолкновительной плазмы представляется кинетическим уравнением Власова

$$\frac{\partial f_{i,e}}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_{i,e}}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F}_{i,e} \frac{\partial f_{i,e}}{\partial \mathbf{p}} = 0, \quad \mathbf{F}_{i,e} = q_{i,e} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{B}] \right) \quad (1)$$

и системой уравнений Максвелла, которые связывают между собой напряженности

электрического магнитного полей  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ , а также плотности заряда и тока  $\rho$ ,  $\mathbf{j}$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (4)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (5)$$

Плотности заряда и тока вычисляются по следующим формулам

$$\mathbf{j} = \sum_{i,e} q_{i,e} \int f_{i,e} \mathbf{v} d\mathbf{v}, \quad \rho = \sum_{i,e} q_{i,e} \int f_{i,e} d\mathbf{v}. \quad (6)$$

Индексы  $i$  и  $e$  указывают тип частиц – ионы и электроны соответственно;  $f_{i,e}$ ,  $q_{i,e}$  – функция распределения частиц и заряд;  $\mathbf{p} = \mathbf{m}\gamma\mathbf{v}$  – релятивистский импульс,  $m$  – масса покоя частицы (иона или электрона),  $\gamma = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$  – релятивистский фактор.

Решение уравнения Власова проводится методом «частиц-в-ячейках». Плазма представляется набором модельных частиц, траекториями движения которых являются характеристики уравнения Власова

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}_e}{dt} &= -(\mathbf{E} + [\mathbf{v}, \mathbf{B}]), \\ \frac{d\mathbf{r}_e}{dt} &= \mathbf{v}_e, \\ \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} &= k(\mathbf{E} + [\mathbf{v}, \mathbf{B}]), \\ \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} &= \mathbf{v}_i. \end{aligned} \quad (7)$$

От координат и скоростей других частиц не зависит движение конкретной частицы, а только от значений напряженностей магнитного и электрического полей. Это позволяет независимо рассматривать ячейки. Изменению подвергаются решение системы уравнений Максвелла, начальные и граничные условия, геометрия. Для решения данной задачи применяется смешанный лагранжево-эйлеров алгоритм. Вычисление координат частиц и скорости, а так же компонентны плотности тока происходит на лагранжевом этапе, функции электрического и магнитного полей – на эйлеровом.

**Эйлеров этап решения уравнений Максвелла** Плотность заряда вычисляется по положениям частиц  $\mathbf{r}_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha)$

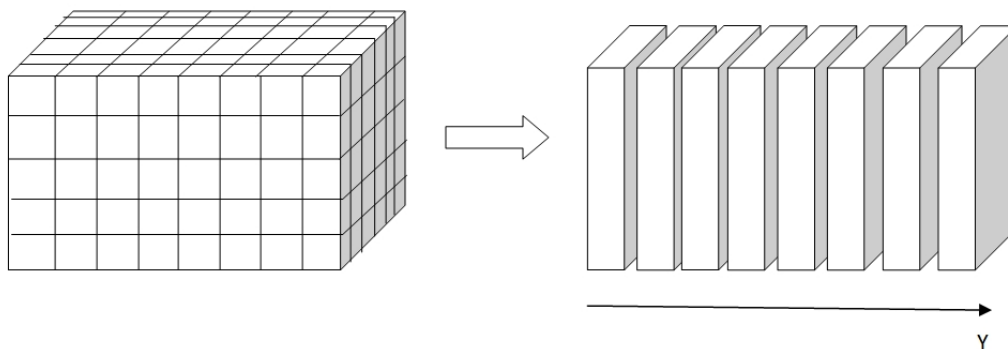
$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_{j=1}^J q_j R(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j(t)), \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_{j=1}^J q_j \mathbf{v}_j(t) R(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j(t)),$$

Из системы уравнений Максвелла, с использованием метода, предложенным Лэнгдоном и Лазинским в 1976 г. [?], находим значения электрического и магнитного полей, которые нетрудно выразить из разностных аналогов законов Фарадея и Ампера (2)-(3):

$$\frac{\mathbf{B}^{m+1/2} - \mathbf{B}^{m-1/2}}{\tau} = -c \operatorname{rot}_h \mathbf{E}^m, \quad (8)$$

$$\frac{\mathbf{E}^{m+1} - \mathbf{E}^m}{\tau} = -4\pi \mathbf{j}^{m+1/2} - c \operatorname{rot}_h \mathbf{B}^{m+1/2}. \quad (9)$$

Преимуществом вышеуказанного метода является возможность распараллеливания алгоритма решения, которое позволяет увеличить количество модельных частиц и повысить точность расчетов. Для распараллеливания задачи использовался библиотека MPI (Message Passing Interface) передачи сообщений между исполняемыми процессами. В параллельная реализация алгоритма требуется найти баланс между сложностью и эффективностью программы. Размер расчетной сетки составляет  $400 \times 400 \times 400$  ячеек и  $1024 \times 1024 \times 1024$  ячеек для решения уравнений Максвелла. Алгоритм решения делится на две части. Лагранжев этап определяет сдвиг частиц и плотности во внутренней области. На эйлеровом этапе решается система уравнений Максвелла. Расчетная область для решения уравнений Максвелла делится на  $N$  подобластей вдоль координаты  $Y$  (рис. 1), для каждой подобласти назначается группа из  $M$  процессорных элементов.



**Рис. 1:** Декомпозиция (разбиение области) Эйлерова этапа метода «частиц-в-ячейках».

Нужно отметить, что эйлеров этап занимает более 60% вычислительной нагрузки. Важно отметить, что распараллеливание проведено не только для того, чтобы уменьшить время счета, но, главным образом, добиться снижения уровня колебаний численного решения.

### РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ И АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Плазменная неустойчивость означает экспоненциальную зависимость параметров плазмы (в т.ч. энергии электрического поля) от времени  $E(t) = E_0 \exp(\gamma t)$ .

Коэффициент  $\gamma > 0$ ,  $\gamma = \frac{\partial \log(E(t))}{\partial t}$  — инкремент неустойчивости, для данной задачи известен из теории.

Если зависимость энергии от времени точно соответствует экспоненте, то логарифм энергии зависит от времени линейно, а величина  $\log(E(t))/t$  будет представлять собой горизонтальную прямую. В реальном расчете это почти никогда не бывает так, поэтому степень приближения логарифма, деленного на время, является показателем качества расчета, а также тестом, на котором можно исследовать сходимость по частицам. Для 100 частиц усредненное значение численного решения стремится к точному решению, но уровень численных флуктуаций слишком велик (рис. 2).

Анализ рисунка 3 показывает, что точность вычислений гарантируется начиная от 8000 частиц на одну ячейку. Но размер численных флуктуаций заметно уменьшается от 1000 модельных частиц на одну ячейку.

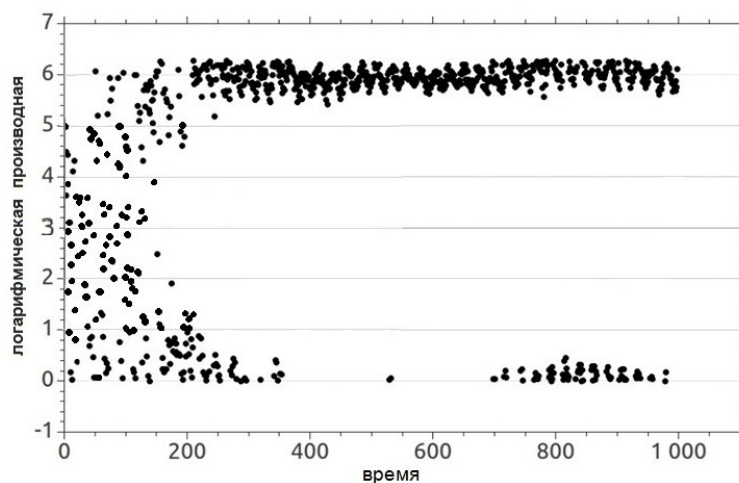


Рис. 2: Расчет инкремента для 100 частиц в ячейке.

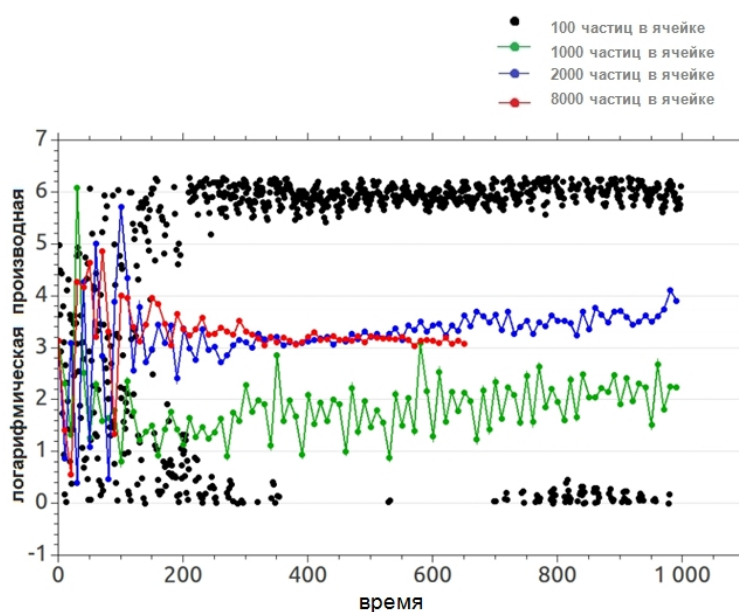


Рис. 3: Расчет инкремента

Таким образом, мы получили сходимость метода «частиц-в-ячейках» для данной задачи. Исследована неустойчивость при взаимодействии электронного пучка с плазмой метод «частиц-в-ячейках».

Проведены численные расчеты на ИВЦ НГУ и получена сходимость по количеству частиц для данной задачи.