

Тема работы: Развитие новых методов эффективного численного моделирования задач аэротермодинамики:

1. Разработка высокопроизводительных компьютерных кодов и их применение для численного моделирования в аэродинамике и динамике разреженных газов, грант РФФИ - проект №.16-57-48007.
2. Численное исследование возникновения и развития неустойчивостей в течениях разреженных газов, грант РФФИ - проект № 18-11-00246.

Состав коллектива:

Кудрявцев Алексей Николаевич, д.ф.-м.н., с.н.с. ИТАМ СО РАН.

Малков Евгений Александрович, д.ф.-м.н., в.н.с. ИТАМ СО РАН.

Шершнёв Антон Алексеевич, к.ф.-м.н., с.н.с. ИТАМ СО РАН.

Полешкин Сергей Олегович, м.н.с., ИТАМ СО РАН.

Научное содержание работы:

1. Постановка задачи.

На основе разработанной программы, реализующей полу-лагранжеву консервативную WENO схему 5-го порядка аппроксимации, и выполняемой на графических процессорах, исследовалась устойчивость бесстолкновительных гравитирующих систем в нелинейном режиме.

2. Современное состояние проблемы.

Необходимым условием адекватных расчетов течений разреженных газов в силовых полях является корректное численное решение уравнения переноса, бесстолкновительного кинетического уравнения. Решение этого уравнения требует больших вычислительных ресурсов. Расчеты на его основе многомерных задач стали возможны только в самое последнее время благодаря появлению мощных гибридных вычислительных систем, включающих, наряду с CPU, графические процессоры общего назначения, GP GPU. Важным направлением в численном моделировании динамики разреженных газов является разработка параллельных алгоритмов численных схем высокого разрешения уравнений переноса, их программная реализация и валидация на основе решения классических задач динамики разреженного газа.

3. Подробное описание работы, включая используемые алгоритмы.

3.1 Консервативная полу-лагранжева WENO-схема 5-го порядка аппроксимации.

В 2018-2020 годах, была разработана и программно реализована консервативная полулагранжева схема для решения кинетических уравнений (КПЛ-5). С использованием этой схемы были проведены численные расчеты распада разрыва в бесстолкновительной среде, при этом задача сводилась к численному решению одномерного уравнения переноса. Было также проведено тестирование многомерной схемы для решения уравнений Власова-Пуассона, рассчитывались колебаний однородного гравитирующего слоя, результаты сравнивались с известным точным решением. Однако, при попытке численного исследования неустойчивости гравитирующего слоя по отношению к возмущениям, нарушающим однородность пространственной плотности, проявились недостатки используемой схемы. Дело в том, что фазовая плотность в начальный момент времени и в процессе развития неустойчивости имеет разрывы. Поэтому корректные расчеты, при соблюдении эффективности, требуют использования схемы, сквозного счета обеспечивающей монотонность в области разрывов и в то же время высокий порядок аппроксимации в областях гладкого решения. Кроме того, схема должна наследовать от КПЛ5 консервативность и полезные свойства полулагранжева подхода. В силу этих требований, для дальнейших исследований была выбрана консервативная полулагранжева WENO-схема 5-го порядка аппроксимации.

3.2 Описание алгоритма.

Полулагранжев подход к построению численных схем для решения уравнений переноса сочетает в себе преимущества лагранжевых и эйлеровых методов и свободен от их недостатков, например [1]. Особенно он эффективен для решения кинетических уравнений, описывающих перенос в фазовом пространстве, в частности для решения уравнений Власова-Максвелла, являющихся основой математической модели физики плазмы, и Власова-Пуассона, используемых в звездной динамике :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F}(t, \mathbf{r}) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} = 0. \quad (1)$$

Выражение слева в уравнении (1.1) имеет вид лагранжевой производной в фазовом пространстве. Равенство нулю лагранжевой производной означает, что значение функции распределения сохраняется вдоль траектории, задаваемой уравнениями движения:

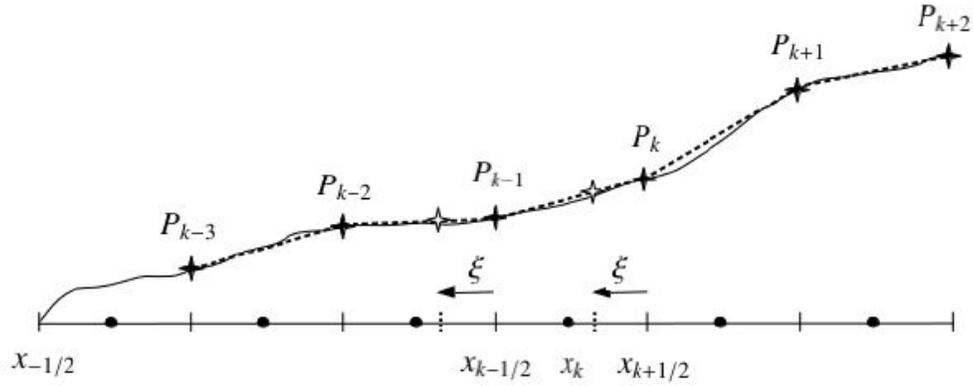


Рис. 2 - Консервативная полулагранжева схема.

Эта схема предполагает известными усредненные по ячейкам эйлеровой сетки значения функции распределения \bar{f}_k . Пусть

$$P^m(x) = \int_{-1/2}^x f(t^m, \mu) d\mu \quad (4)$$

- первообразная функции $f(t^m, x)$ в фиксированный момент времени, на временном слое t^m . Разность значений функции $P^m(x)$ в любых двух точках на оси x , деленная на расстояние между ними, равна усредненному значению функции f на этом интервале. Чтобы найти усредненное по k -ой ячейке значение функции на n -ом временном слое, находим положение концов интервала $[x_{k-1/2}, x_{k+1/2}]$ на t^{n-1} слое, решая уравнения движения (1.2). Затем, находим значения функции $P^{n-1}(x)$ на границах полученного таким образом интервала $[x'_{k-1/2}, x'_{k+1/2}]$, где $x'_{k+1/2} = x_{k+1/2} - \xi$, интерполяцией с узлами в точках $x_{j+1/2}$, $j = 0, \dots$, в которых значения функции $P^{n-1}(x)$ очевидно известны:

$$P_j = P^{n-1}(x_{j+1/2}) = h \sum_{i=0}^j \bar{f}_i^{n-1}. \quad (5)$$

Окончательно, усредненное значение функции в k -ой ячейке на n -ом слое равно

$$\bar{f}_k^n = \frac{1}{h} (P^{n-1}(x'_{k+1/2}) - P^{n-1}(x'_{k-1/2})). \quad (6)$$

Выбор набора узлов интерполяции и её тип определяется требуемым порядком аппроксимации, устойчивостью и другими свойствами численной схемы. В отчетный период была программно реализована WENO-интерполяция, обеспечивающая 5-й порядок аппроксимации в областях с гладким решением [3]

3.3 Программная реализация с использованием интерфейса программирования на графических процессорах CUDA.

В листингах 1 и 2 приводится программный код реализации консервативной полулагранжевой WENO-схемы 5-го порядка для численного решения уравнения (1.1) в случае 2-мерного фазового пространства. Рисунок 3, на котором изображена сетка в фазовом пространстве, с координатами x , u , поясняет проведенную декомпозицию характерную для модели параллелизма SIMT [4]. Каждому дискретному значению скорости u_{n_2} соответствует отдельный блок нитей (см. Листинг 1). В разделяемой памяти выделяется область для хранения значений функции распределения при фиксированной величине скорости (переменная *cash*), массив *df* в листинге 1, и массив для хранения значений первообразной функции распределения f^P в листингах 1, 2.

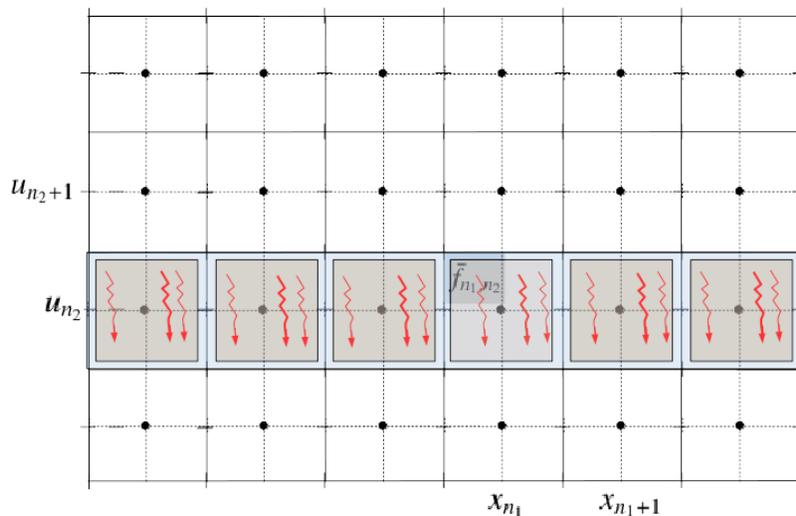


Рис. 3 - Декомпозиция данных в фазовом пространстве

Для каждого значения скорости вычисляется число Куранта $xi = u[n_2] * tau/h$, общее для всех нитей блока, которое разделяется на целую часть *shift* и дробную. Массив *df* в разделяемой памяти инициализируется значениями функции распределения, хранящимися в глобальной памяти, в массиве *Df*, со сдвигом сетки на целую величину *shift*.

Инициализация массива fP , хранящего значения первообразной, общей для отдельного блока, выполняется одной нитью с использованием цикла *for*. Для исключения ветвлений, обусловленных циклом *for* и увеличивающих время вычислений, используется прага *unroll*. Хранение данных в разделяемой памяти с низкой латентностью и большой пропускной способностью значительно увеличивает производительность вычислений. Вычисление потоков на границе ячеек проводится с использованием WENO-интерполяции, реализованной в функции `__device__ REAL dPhi(...)` (Листинг 2), выполняемой также на графическом процессоре. Обновленное на текущем временном слое значение функции распределения сохраняется в глобальной памяти в массиве *Df* (Листинг 1).

Листинг 1.

```
1. #if SINGLE
2. #define REAL float
3. #else
4. #define REAL double
5.
6. int flag;
7. REAL xi;
8. int shift;
9. extern __shared__ REAL cache[];
10. int n2=blockIdx.x;
11.
12. REAL* df=(REAL*)&cache[0];
13. REAL* fP=(REAL*)&cache[N1];
14.
15. xi=fabsf(u[n2]);
16. flag=lrintf( (1.0+u[n2]/xi)/2.0 );
17. xi*=tau; //(tau/h);
18. shift=int(xi);
19. xi=xi-shift;
20.
21. for(int n1=threadIdx.x; n1<N1;n1+=blockDim.x){
22. df[n1]=0.0;
23. __syncthreads();
24.
```

```

25. if(flag)
26.   if(n1>=shift)
27.     df[n1]=Df[n1+n2*N1-shift];
28. if(!flag)
29.   if(n1<N1-shift)
30.     df[n1]=Df[n1+n2*N1+shift];
31. }
32. __syncthreads();
33.
34. if(threadIdx.x==0){
35.   fP[0] = 0.0;
36.   #pragma unroll
37.   for(int n = 1; n < N1; n++)
38.     fP[n] = fP[n - 1] + df[n];
39. }
40. __syncthreads();
41.
42. for(int n1=threadIdx.x; n1<N1;n1+=blockDim.x){
43.   if(n1 >= 3 && n1 < N1 - 3){
44.     Df[n1+n2*N1] = dPhi(fP, N1, n1, -xi, flag);
45.     __syncthreads();
46.     Df[n1+n2*N1] -= Df[n1-1+n2*N1];
47.   }
48. }
49. }

```

Листинг 2.

```

1. __device__ REAL dPhi(REAL* F, int i, REAL xi, int flag) {
2.   REAL U1, U2, U3, U4, U5, U6;
3.
4.   U1 = F[flag*(i - 3)+(1-flag)*(i+3)];
5.   U2 = F[flag*(i - 2)+(1-flag)*(i+2)];
6.   U3 = F[flag*(i - 1)+(1-flag)*(i+1)];
7.   U4 = F[i];
8.   U5 = F[flag*(i + 1)+(1-flag)*(i-1)];
9.   U6 = F[flag*(i + 2)+(1-flag)*(i-2)];
10.

```

11. REAL S1 = U4 + xi*xi*xi * (-U1 / 6. + U2 / 2. - U3 / 2. + U4 / 6.) +
 12. xi*xi * (-U1 / 2. + 2. * U2 - 5. * U3 / 2. + U4) +
 13. xi*(-U1 / 3. + 3. * U2 / 2. - 3. * U3 + 11. * U4 / 6.);
 14.
 15. REAL S2 = U4 + xi*xi*xi * (-U2 / 6. + U3 / 2. - U4 / 2. + U5 / 6.) +
 16. xi*xi * (U3 / 2. - U4 + U5 / 2.) +
 17. xi*(U2 / 6. - U3 + U4 / 2. + U5 / 3.);
 18.
 19. REAL S3 = U4 + xi*xi*xi * (-U3 / 6. + U4 / 2. - U5 / 2. + U6 / 6.) +
 20. xi*xi * (U3 / 2. - U4 + U5 / 2.) +
 21. xi*(-U3 / 3. - U4 / 2. + U5 - U6 / 6.);
 22.
 23. REAL C1 = (xi - 1.)*(xi - 2.) / 20.;
 24. REAL C2 = -(xi + 3.)*(xi - 2.) / 10.;
 25. REAL C3 = (xi + 3.)*(xi + 2.) / 20.;
 26.
 27. REAL beta1 = 4.*U1*U1 / 3. - 9.*U1*U2 +
 28. 10.*U1*U3 - 11.*U1*U4 / 3. +
 29. 16.*U2*U2 - 37.*U2*U3 + 14.*U2*U4 +
 30. 22.*U3*U3 - 17.*U3*U4 + 10.*U4*U4 / 3.;
 31.
 32. REAL beta2 = 4.*U2*U2 / 3. - 7.*U2*U3 +
 33. 6.*U2*U4 - 5.*U2*U5 / 3. +
 34. 10.*U3*U3 - 19.*U3*U4 +
 35. 6.*U3*U5 + 10.*U4*U4 - 7.*U4*U5 + 4.*U5*U5 / 3.;
 36.
 37. REAL beta3 = 10.*U3*U3 / 3. - 17.*U3*U4 +
 38. 14.*U3*U5 - 11.*U3*U6 / 3. + 22.*U4*U4 -
 39. 37.*U4*U5 + 10.*U4*U6 + 16.*U5*U5 - 9.*U5*U6 + 4.*U6*U6 / 3.;
 40.
 41. REAL eps = 1.0E-6;
 42. REAL wt1 = C1 / (eps + beta1) / (eps + beta1);
 43. REAL wt2 = C2 / (eps + beta2) / (eps + beta2);
 44. REAL wt3 = C3 / (eps + beta3) / (eps + beta3);
 45.
 46. REAL w1 = wt1 / (wt1 + wt2 + wt3);
 47. REAL w2 = wt2 / (wt1 + wt2 + wt3);
 48. REAL w3 = wt3 / (wt1 + wt2 + wt3);
 49.

```

50. return w1*S1 + w2*S2 + w3*S3; //0.1*S1+0.6*S2+0.3*S3;
51. }

```

3.4 Результаты тестирования программы.

С целью валидации разработанной программы были проведены расчеты переноса в одномерном и двумерном пространстве с постоянным полем скоростей. На рисунке 4 показаны результаты расчетов переноса прямоугольного распределения, при разных числах Куранта, $cfl = u\tau/h = 0.25, 0.75, 1.5, 3.0$, где u - постоянная скорость переноса, τ - шаг по времени, и h - шаг пространственной сетки. Расчетная сетка содержала 1024 узла. На графике справа в увеличенном масштабе показан фрагмент распределения, позволяющий судить о мере диссипации при расчетах с разными числами Куранта.

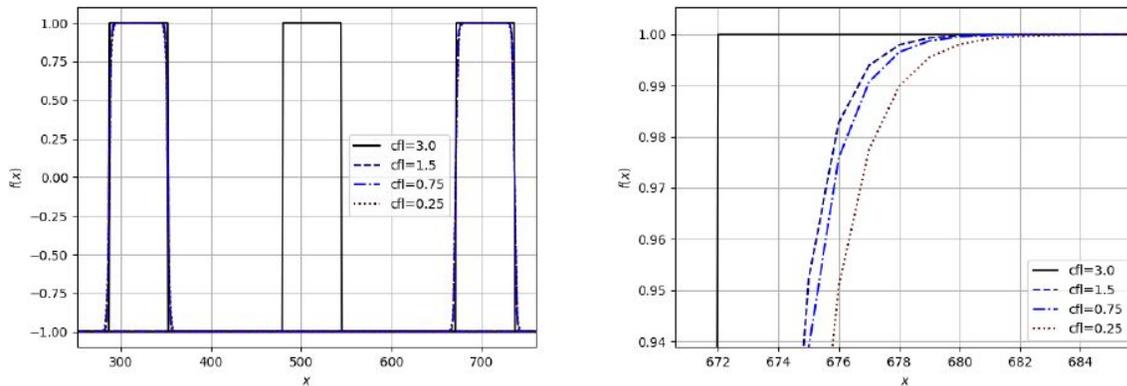


Рис. 4 - Расчет переноса прямоугольной функции с разными числами Куранта.

На рисунках 5 и 6 показаны контуры фазовой плотности при численном решении двумерного уравнения переноса

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial z} + F(z) \frac{\partial f}{\partial u} = 0. \quad (7)$$

Расчеты проводились для двух типов стационарного фазового потока, линейного $(u, -z)$, приводящего к вращению фазовой плоскости, и нелинейного $(u, -z - z^2)$, приводящего к вращению и деформации. Расчетная сетка бралась с размерностью 2048×2048 , число итераций равнялось 6000, число Куранта $cfl = u_{max} \tau/h = 0.75$. Расчетная область в фазовом

пространстве задавалась отношением $(u, z) \in [-2.0, 2.0] \times [-2.0, 2.0]$. Начальные условия - однородная фазовая плотность внутри квадрата $[-1.0, 1.0] \times [-1.0, 1.0]$. На рисунке 5 представлен контур

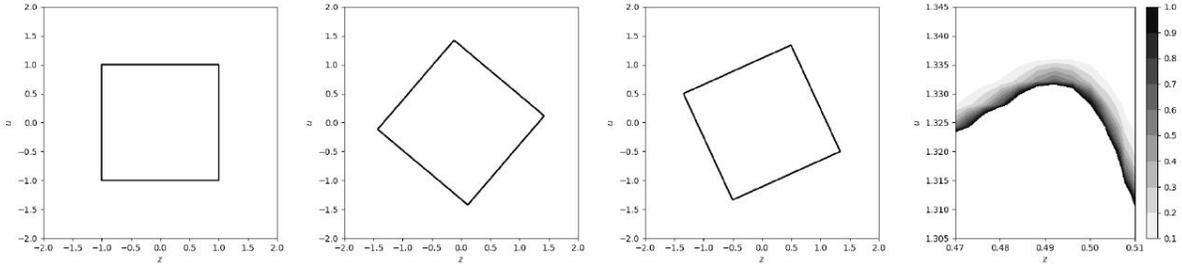


Рис. 5 - Эволюция прямоугольной области под действием линейного фазового потока.

начальной фазовой плотности, а также, слева направо, - контуры фазовой плотности, изменяющейся под действием линейного потока, после 480 и 780 итераций. На последнем рисунке показан увеличенный фрагмент контура после 780 итераций. На рисунке 6 представлены контуры фазовой плотности, изменяющейся под действием нелинейного потока, после 300, 1500 и 5100 итераций. На последнем рисунке показан увеличенный фрагмент контура после 5100 итераций. Как видно WENO-схема обеспечивает отсутствие осцилляций, а высокий порядок аппроксимации и полулагранжев подход - малую численную диссипацию.

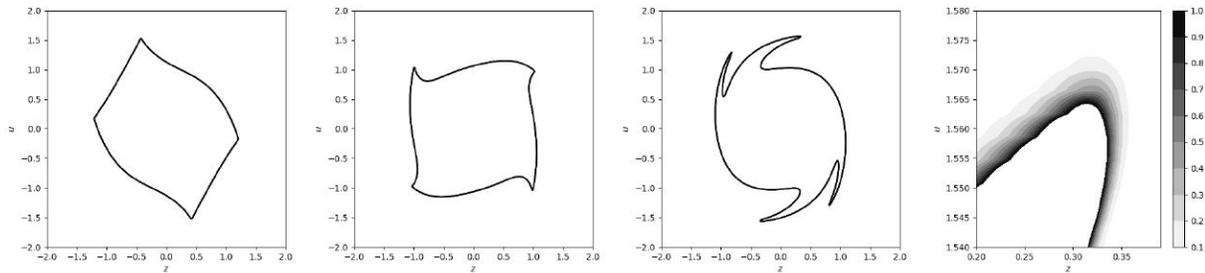


Рис. 6 - Эволюция прямоугольной области под действием нелинейного фазового потока.

3.5 Исследование устойчивости самогравитирующего слоя.

Крупномасштабная неустойчивость гравитирующих систем играет ведущую роль в бесстолкновительной релаксации, достижении ими квазистационарного состояния на ранней стадии эволюции. Современные численные методы высокого разрешения и возросшие мощности вычислительных систем позволяют исследовать этот феномен с помощью компьютерного моделирования на новом уровне.

Цель наших исследований в области изучения развития гравитационной неустойчивости на кинетическом уровне состоит, во первых, в разработке инструментария - программных кодов, и их верификации и валидации для численного решения уравнений Власова-Пуассона на основе сравнения расчетов с аналитическими нестационарными решениями. Во вторых, в ходе исследований предполагается изучить развитие неустойчивостей, обнаруженных аналитически в линейном приближении, на нелинейной стадии и их влияние на формирование структуры бесстолкновительной гравитирующей системы. В отчетный период изучалась неустойчивость плоского самогравитирующего слоя. Стоит отметить, что долговременная нелинейная эволюция самогравитирующих систем не

исследована до конца даже в случае одного пространственного измерения. Двумерная фазовая модель плоского слоя обладает основными чертами 6-мерных моделей, но ее исследование численными методами требует намного меньше вычислительных ресурсов, что позволяет сравнительно быстро провести серии расчетов с высоким разрешением и отработать основные этапы подхода к численному моделированию 6-мерных моделей.

3.5.1 Аналитическое исследование линейной устойчивости пульсирующего самогравитирующего слоя.

Модель самогравитирующего слоя, основанная на точном решении уравнений Власова - Пуассона, подробно описана в отчете за 2018 год. В отчетный период в линейном приближении была исследована устойчивость этой модели по отношению к возмущениям, нарушающим пространственную плотность. В таблице 1 представлены мультипликаторы Флоке, характеризующие, в данном случае, поведение возмущений с потенциалом вида

$$\Phi(t, z) \sim z^4 \psi(t)$$

(8)

Таблица 1. - Мультипликаторы Флоке.

α^2	a_{max}	period	the 1-st characteristic multiplier	the 2-d one	the 3-d one	the 4-th one
1.00	1.000	3.62760	0.342+0.940i(1.000)	0.342-0.940i(1.000)	0.217+0.976i(1.000)	0.217-0.976i(1.000)
0.99	1.057	3.62659	0.332+0.943i(1.000)	0.332-0.943i(1.000)	0.236+0.972i(1.000)	0.236-0.972i(1.000)
0.98	1.080	3.62558	0.314+0.949i(1.000)	0.314-0.949i(1.000)	0.261+0.965i(1.000)	0.261-0.965i(1.000)
0.97	1.097	3.62456	0.301 + 0.987i(1.032)	0.301 - 0.987i(1.032)	0.283 + 0.927i(0.969)	0.283 - 0.927i(0.969)
0.96	1.111	3.62353	0.311+1.007i(1.054)	0.311-1.007i(1.054)	0.280+0.907i(0.949)	0.280-0.907i(0.949)
.....
0.85	1.209	3.61190	0.397+1.095i(1.165)	0.397-1.095i(1.165)	0.293+0.807i(0.859)	0.293-0.807i(0.859)
.....
0.50	1.366	3.56918	0.739+1.171i(1.385)	0.739-1.171i(1.385)	0.386+0.611i(0.722)	0.386-0.611i(0.722)
.....
0.12	1.472	3.50284	1.614+0.335i(1.648)	1.614-0.335i(1.648)	0.594+0.123i(0.607)	0.594-0.123i(0.607)
0.11	1.474	3.50043	1.786	1.527	0.655	0.560
0.10	1.477	3.49795	2.105	1.293	0.773	0.475
.....
0.07	1.484	3.48998	2.716	0.988+0.157i(1.000)	0.988-0.157i(1.000)	0.36822
.....
0.01	1.498	3.46959	4.285	0.988+0.153i(1.000)	0.988-0.153i(1.000)	0.23334

Рост возмущений наступает тогда, когда модуль одного из мультипликаторов, представленных в столбцах 4-7, больше единицы [5]. В столбцах 1-3 представлен критический параметр α^2 и эквивалентные ему параметры, имеющие простой физический смысл и характеризующие степень нестационарности слоя, его нормированный размер в момент максимального расширения слоя a_{max} и нормированный период пульсации слоя. Рисунок 7 представляет взаимозависимости этих параметров.

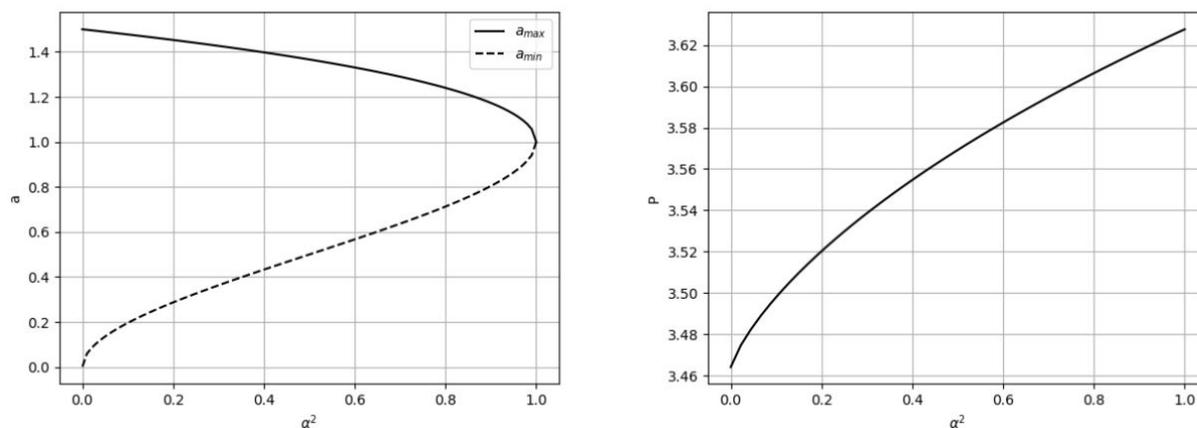


Рис. 7 - Амплитуда пульсаций (слева) и период пульсаций (справа) слоя в зависимости от параметра α^2 .

При значении критического параметра $\alpha^2 = 0.97$ слой становится неустойчивым по отношению к возмущениям, нарушающим однородность пространственной плотности.

3.5.2 Численное исследование неустойчивости пульсирующего слоя на нелинейной стадии.

Разработанная программа на основе реализации консервативной полулагранжевой WENO схемы 5-го порядка для выполнения на графическом процессоре использовалась для расчетов эволюции возмущений на нелинейной стадии. На рисунке 8 изображены профили пространственной плотности, соответствующие пульсирующим слоям со значением критического параметра α^2 на

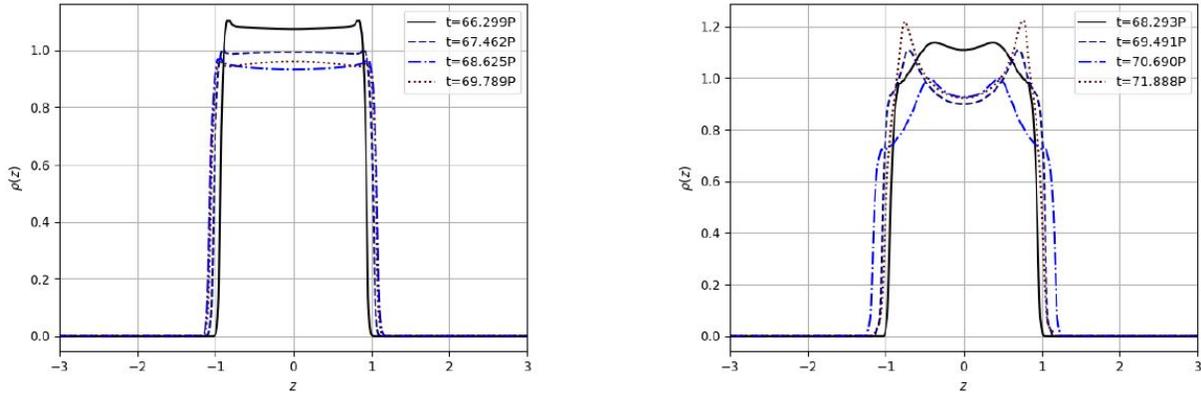


Рис. 8 - Изменение плотности при устойчивых, $\alpha^2 = 0.98$ (слева), и неустойчивых, $\alpha^2 = 0.96$ (справа), пульсациях слоя.

границе области устойчивости после примерно 70 собственных пульсаций. На неустойчивость при значениях параметра $\alpha^2 < 0.97$ указывает также изменение амплитуды вириального отношения, характеризующего степень нестационарности системы, -

$$R_{vir} = \frac{2E_{kin}}{W}, \quad (9)$$

где E_{kin} - кинетическая энергия слоя, W - гравитационная энергия слоя. Для стационарной самогравитирующей системы вириальное отношение равно единице. На рисунке 9 представлены графики изменения вириального отношения для устойчивых и неустойчивых пульсаций.

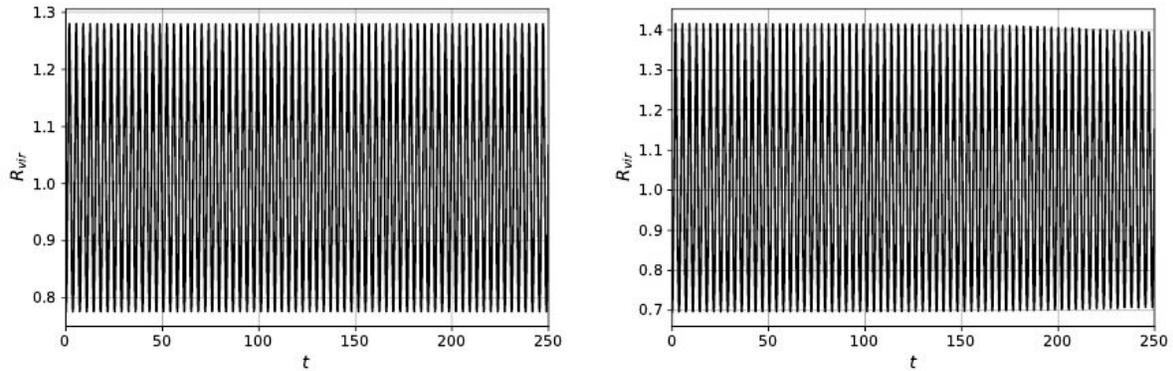


Рис. 9 - Изменение амплитуды колебаний вириального отношения при устойчивых, $\alpha^2 = 0.98$, и неустойчивых, $\alpha^2 = 0.96$, пульсациях слоя.

В отчетный период были проведены многочисленные расчеты пульсаций самогравитирующего слоя при различных значениях параметра α^2 . При $\alpha^2 < 0.97$ развитие неустойчивости приводит к установлению динамического равновесия, бесстолкновительной релаксации. Время наступления стационарного состояния тем меньше, чем больше инкремент неустойчивости моды возмущения, нарушающей однородность пространственной плотности, вычисленный при линейном анализе (см. Табл. 1). На рисунках 10-14 приведены результаты расчетов эволюции самогравитирующего слоя при $\alpha^2 = 0.5$. Представленная картина развития неустойчивости типична для значений параметра $\alpha^2 < 0.97$.

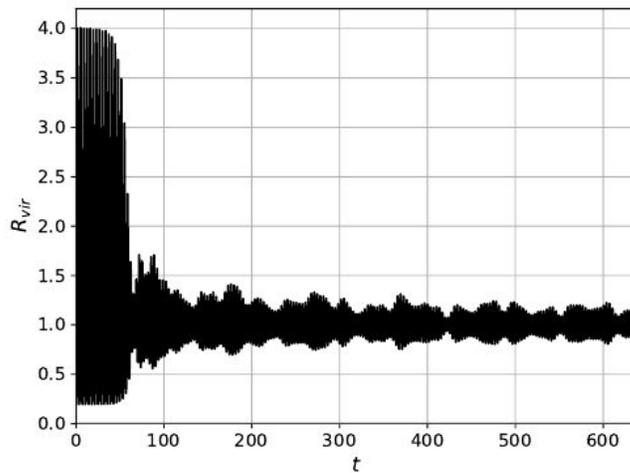


Рис. 10 - Изменение амплитуды колебаний вириального отношения при $\alpha^2 = 0.5$ за время $t = 640$ ($180P$).

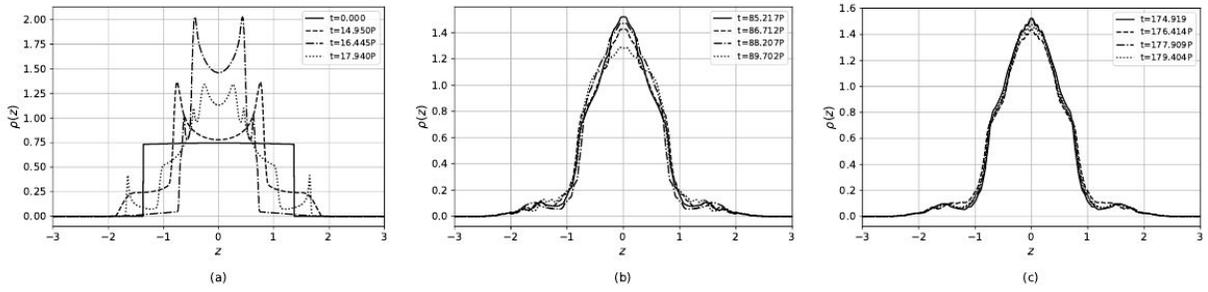


Рис. 11 - Изменение плотности при $\alpha^2 = 0.5$.

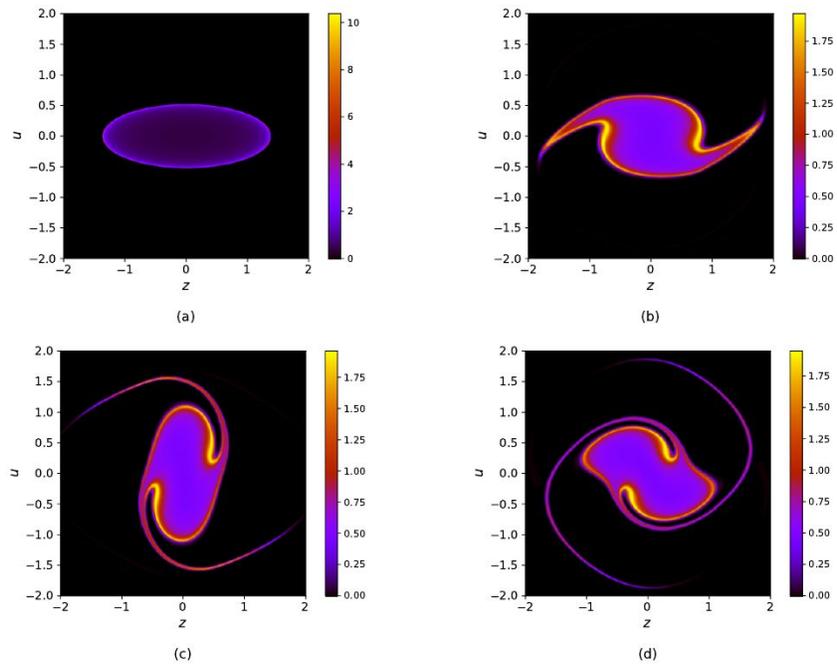


Рис. 12 - Фазовая плотность при $\alpha^2 = 0.5$ в моменты времени $t = 0$ (a), $14.950P$ (b), $16.445P$ (c), $17.940P$ (d).

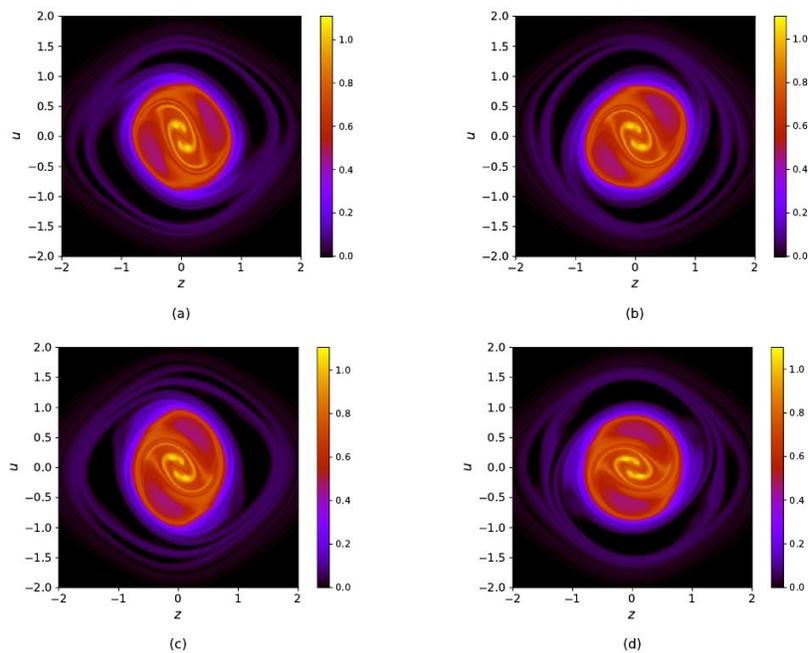


Рис. 13 - Фазовая плотность при $\alpha^2 = 0.5$ в моменты времени $t = 85.217P$ (a), $86.712P$ (b), $88.207P$ (c), $89.702P$ (d).

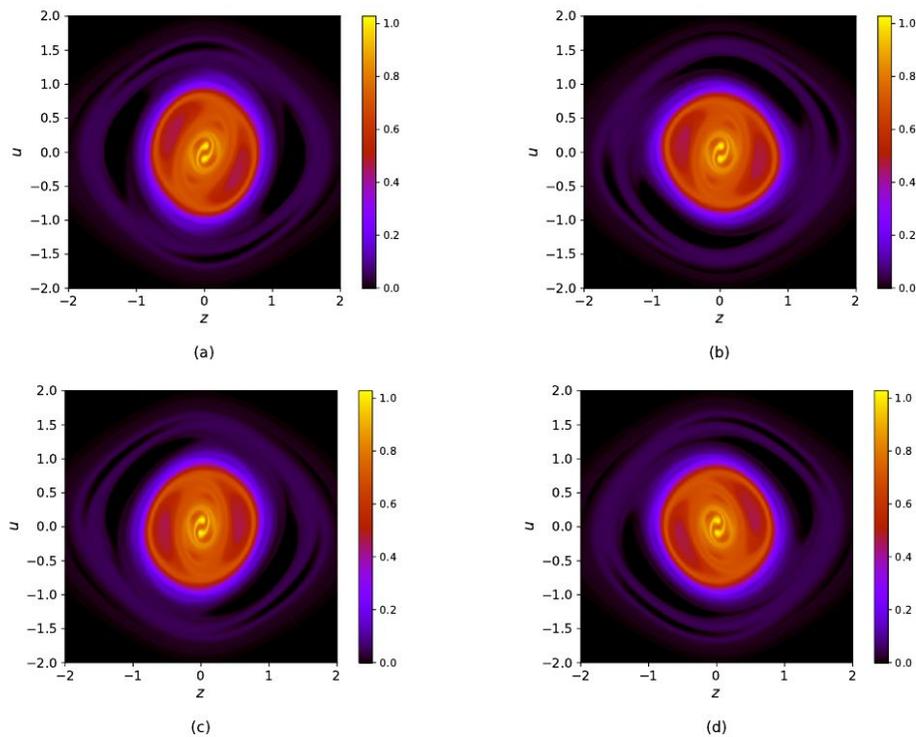


Рис. 14 - Фазовая плотность при $\alpha^2 = 0.5$ в моменты времени $t = 174.919P$ (a), $176.414P$ (b), $177.909P$ (c), $179.404P$ (d).

4. Результаты.

- Разработан модуль, реализующий схему расщепления по физическим процессам, свободному переносу и ускорению в гравитирующем поле. Программный алгоритм основан на использовании **консервативной полулагранжевой WENO схеме 5-го порядка аппроксимации**. Модуль программно реализован с использованием модели программирования SIMT в рамках архитектуры CUDA.
- Была проведена валидация модуля на основании расчетов устойчивости пульсаций гравитирующего слоя и сравнении результатов расчетов с теоретическими исследованиями по устойчивости слоя в линейном приближении.
- **Были проведены исследования по бесстолкновительной релаксации гравитирующих систем** на основе численных расчетов развития неустойчивости гравитирующего слоя в нелинейном режиме.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. Sonnendrucker, J. Roche, P. Bertrand, A. Ghizzo, J. Comp. Phys. 149, 201–220 (1999).
2. Strang G., SIAM J. Numer. Anal., 5, 506 (1968)
3. J.-M. Qiu, C.-W. Shu, J. Comp. Phys. 230, 863–889 (2011).
4. <https://developer.nvidia.com/cuda-zone>
5. Iooss G., Joseph D. D., 1980, Elementary Stability and Bifurcation Theory, Springer Verlag, New York

5. Эффект от использования кластера в достижении целей работы.

Без использования вычислительных ресурсов ИВЦ НГУ выполнение упомянутых численных исследований было бы невозможным, поскольку количество узлов расчетной сетки при решении кинетического уравнения составляло десятки миллионов узлов. Планируемые расчеты для исследования эволюции 3D-моделей гравитирующих систем на основе полулагранжевых методов (предполагаемое число узлов несколько миллиардов) могут быть проведены только с использованием гибридной вычислительной системы HPE Apollo 6500 Gen10.

Перечень публикаций, содержащих результаты работы

1. Malkov E.A., Kudryavtsev A.N. Non-stationary Antonov self-gravitating layer: analytics and numerics //Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, - 2020, v. 491(3), p. 3952–3966 <https://doi.org/10.1093/mnras/stz3276> (Impact factor: 5.231)
2. Malkov E.A., Poleshkin S.O., Shershnev A.A. and Kudryavtsev A.N. Numerical solution of the Vlasov-Poisson equations using a semi-Lagrangian WENO scheme implemented on GPU //Journal of Physics, - 2019, 1404, 012119 [doi:10.1088/1742-6596/1404/1/012119](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1404/1/012119)
3. Kudryavtsev A.N., Malkov Ye.A., Poleshkin S.O., Shershnev A.A. Numerical study of unsteady shock wave interaction in a rarefied gas // XIX International Conference on the Methods of Aerophysical Research (ICMAR 2018) (Novosibirsk, Russia, 13 - 19 Aug., 2018) : abstracts. -Pt.II. - Novosibirsk, 2018. -P. 167-168.
4. Malkov E.A., Momynov S.B. Phase portraits of the henon-heiles potential // News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan-Series Physico-Mathematical. - 2018. -Vol.5, No.321. -P. 5-9. DOI: 10.32014/2018.2518-1726.1
5. Poleshkin S.O., Shershnev A.A., Malkov E.A., Kudryavtsev A.N. Parallel GPU implementation of semi-Lagrangian high order finite-difference schemes for solving kinetic equations // XIX International Conference on the Methods of Aerophysical Research (ICMAR 2018) (Novosibirsk, Russia, 13–19 Aug., 2018) : AIP Conference Proceedings. - Vol.2027, No.1. -S.I., 2018. -040068(7) p. DOI: 10.1063/1.5065342
6. Poleshkin S.O., Malkov E.A., Kudryavtsev A.N., Shershnev A.A., Bondar Y.A., Kohanchik A.A. Simulation of 2D rarefied gas flows based on the numerical solution of the Boltzmann equation // Proceedings of the XXV Conference on High-Energy Processes in Condensed Matter (HEPCM 2017): Dedicated to the 60th anniversary of the Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS (Russia, Novosibirsk, 5–9 Jun., 2017) : AIP Conference Proceedings. -Vol.1893, No.1. -S.I.: AIP Publishing, 2017. -030050 p. DOI: 10.1063/1.5007508