

# ОТЧЕТ О ПРОДЕЛАННОЙ РАБОТЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОБОРУДОВАНИЯ ИВЦ НГУ

## 1. Тема работы

Оптимизация режимов стабилизации оптических стандартов частоты, стабилизированных по резонансам насыщенного поглощения.

## 2. Аннотация

В рамках формализма атомной матрицы плотности проводится теоретическое исследование наклона сигнала ошибки для стандартов частоты, основанных на резонансе насыщенного поглощения, возбуждаемого в поле двух встречных волн. Рассмотрены две схемы формирования сигнала ошибки: в первом случае модулируется частота только пробного поля, а во втором случае осуществляется частотная модуляция обеих волн. На основе проведенных расчетов определены оптимальные параметры гармонической модуляции, при которых наклон имеет максимальное значение.

## 3. Состав коллектива

1. Коваленко Дмитрий Валериевич, м.н.с. ИЛФ СО РАН.
2. Басалаев Максим Юрьевич, к.ф.-м.н., м.н.с., ИЛФ СО РАН.
3. Юдин Валерий Иванович, д.ф.-м.н., г.н.с., ИЛФ СО РАН.

## 4. Информация о грантах

Гранты РФФИ № 16-32-60050 мол\_а\_дк, № 17-02-00570;  
Грант Министерства образования и науки РФ № 3.1326.2017/4.6.

## 5. Научное содержание работы

### 5.1. Современное состояние проблемы

В настоящее время стандарты частоты и атомные часы на их основе являются важными и востребованными квантовыми устройствами, которые имеют широкий спектр приложений во многих областях науки (проверка фундаментальных теорий, высокоточные измерения) и техники (навигация, системы связи и передачи информации) [1]. Одними из широко распространенных оптических (в том числе транспортируемых) стандартов частоты являются He – Ne- и Nd: YAG-лазеры, стабилизируемые по резонансам насыщенного поглощения (РНП) на колебательно-вращательных переходах молекул метана и йода [2-4]. Преимуществами данных стандартов являются малые габариты в сочетании с достаточно высоким значением стабильности частоты (на уровне  $10^{-15}$  за 100 с) [5-7]. Чаще всего РНП используется на практике в конфигурации из двух встречных световых волн одинаковой частоты (стоячая волна), взаимодействующих с общим переходом в атоме (молекуле). При этом, в спектре поглощения одной из волн (пробной) РНП наблюдается в виде узкого провала (в центре широкого доплеровского

контура), который может использоваться в качестве частотного репера для стабилизации оптических стандартов частоты [8].

Основной целью исследований, посвященных стандартам частоты, является повышение их стабильности, что может достигаться путем оптимизации режимов стабилизации частоты. В работах [9-13] показано, что наклон сигнала ошибки существенно зависит от параметров гармонической частотной модуляции (индекса и частоты модуляции), используемой в системах стабилизации. Данный наклон является одним из основных параметров, определяющих метрологические характеристики (стабильность и точность) частотных стандартов [14]. Поэтому важной задачей является максимизация наклона. Однако детальное теоретическое исследование данного вопроса, которое требует нахождения динамического решения для матрицы плотности, ранее не проводилось. В настоящей работе мы восполняем этот пробел, используя для вычислений недавно разработанный нами метод [15], который позволяет конструировать точное периодическое решение уравнения для матрицы плотности без применения Фурье-анализа. При этом мы численно рассчитываем сигнал ошибки в широком диапазоне параметров частотной модуляции лазерного поля и находим оптимальные режимы стабилизации частоты, для которых сигнал ошибки имеет максимальный наклон.

1. Ludlow A.D., Boyd M.M., Ye J., Peik E., Schmidt P.O. // *Rev. Mod. Phys.* 2015. V. 87. P. 637.
2. Летохов В.С., Чеботаев В.П. *Нелинейная лазерная спектроскопия сверхвысокого разрешения*. М.: Наука, 1990. 512 с.; Letokhov V.S., Chebotayev V.P. *Nonlinear Laser Spectroscopy*. Berlin: Springer-Verlag, 1977. 466 p.
3. Губин М.А., Киреев А.Н., Пнев А.Б., Тюриков Д.А., Шелестов Д.А., Шелковников А.С. // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение*. 2011. Т. S2. С. 199.
4. Скворцов М.Н., Охупкин М.В., Невский А.Ю., Багаев С.Н. // *Квант. электрон.* 2004. Т. 34. С. 1101.
5. Goncharov A.N. et al. // *J. Appl. Phys. B*. 2004. V. 78. P. 725.
6. Zang E.J. et al. // *J. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*. 2007. V. 56. P. 673.
7. Губин М.А., Киреев А.Н., Конященко А.В., Крюков П.Г., Таусенев А.В., Тюриков Д.А., Шелковников А.С. // *Квант. электрон.* 2008. Т. 38. С. 613.
8. Rieger T., Volz T. *Doppler – Free Saturation Spectroscopy*. [Электронный ресурс] Режим доступа: <http://www.ph.tum.de/studium/praktika/fopra/text/userguide-05.en.pdf>.
9. Барашев В.А., Семибаламут В.М., Титов Е.А. // *Квант. электрон.* 1979. Т. 6. С. 261.
10. Bjorklund G.C., Levenson M.D. // *Appl. Phys. B*. 1983. V. 32. P. 145.
11. Jaatinen E. // *Opt. Commun.* 1995. V. 120. P. 91.
12. Курбатов А.А., Луговой А.А., Титов Е.А. // *Опт. и спектр.* 2006. Т. 100. С. 400.

13. Eble J.F., Schmidt-Kaler F. // Appl. Phys. B. 2007. V. 88. P. 563.  
 14. Riehle F. Frequency Standards: Basics and Applications. John Wiley & Sons, Inc, 2006. 540 p.; Фриц Р. Стандарты частоты: принципы и приложения. Физматлит, 2009. 511 с.  
 15. Yudin V.I., Taichenachev A.V., Basalaev M.Yu. // Phys. Rev. A. 2016. V. 93. P. 013820.

## 5.2 Подробное описание работы, включая используемые материалы

В качестве модели рассматривается взаимодействие двухуровневой системы газа атомов (молекул) (Рис. 1) с частотно-модулированным полем двух встречных волн (пробная волна + волна накачки):

$$E(t) = E_1 e^{-i(\omega t - kz + \Phi_1(t))} + E_2 e^{-i(\omega t + kz + \Phi_2(t))} + \text{к.с.};$$

$$\Phi_{1,2}(t) = \mu_{1,2} \sin(f_m t),$$
(1)

где  $E_1, E_2$  есть амплитуды пробной волны и волны накачки соответственно,  $\omega$  – частота электромагнитного поля,  $k$  – волновое число,  $f_m$  – частота модуляции,  $\mu_{1,2}$  – индексы модуляции пробной волны и волны накачки соответственно.

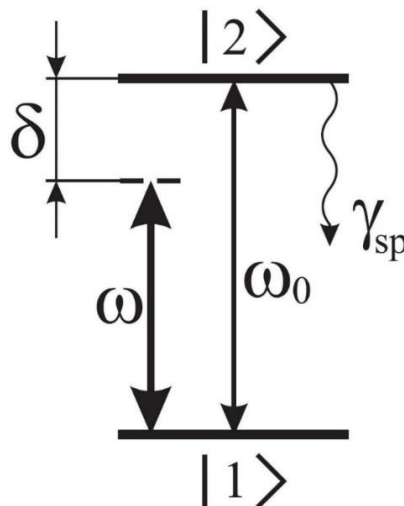


Рис. 1. Схема двухуровневой квантовой системы

Атомная среда предполагается достаточно разреженной, что позволяет пренебречь эффектами межатомного взаимодействия и решать задачу в одноатомном приближении. Также рассматривается случай достаточно нагретых атомов (например, при комнатной температуре), что позволяет пренебречь интерференцией пробного и накачивающего полей. Учитывается только одномерное движение атома вдоль оси  $z$ , то есть вектор скорости атома имеет вид:  $\mathbf{v} = (0, 0, v_z)$ . Для математического описания взаимодействия атомов с резонансным электромагнитным полем используется стандартный формализм атомной матрицы плотности:

$$\hat{\rho}(t) = \sum_{j,k} |j\rangle \rho_{jk}(t) \langle k|,$$
(2)

где  $j, k = 1, 2$ . В этом случае динамика двухуровневой системы в резонансном приближении с учётом только первых пространственных гармоник описывается системой квантово-механических уравнений на матричные компоненты  $\rho_{jk}$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \rho_{11} = \gamma_{\text{sp}} \rho_{22} + i(\Omega_1^* \rho_{21}^{(1)} - \rho_{12}^{(1)} \Omega_1) + i(\Omega_2^* \rho_{21}^{(2)} - \rho_{12}^{(2)} \Omega_2); \\ \frac{\partial}{\partial t} \rho_{22} = -\gamma_{\text{sp}} \rho_{22} + i(\Omega_1 \rho_{12}^{(1)} - \rho_{21}^{(1)} \Omega_1^*) + i(\Omega_2 \rho_{12}^{(2)} - \rho_{21}^{(2)} \Omega_2^*); \\ \frac{\partial}{\partial t} \rho_{21}^{(1)} = -\gamma_{\text{opt}} \rho_{21}^{(1)} + i[\delta_1(t) - kv_z] \rho_{21}^{(1)} + i\Omega_1(\rho_{11} - \rho_{22}); \\ \frac{\partial}{\partial t} \rho_{21}^{(2)} = -\gamma_{\text{opt}} \rho_{21}^{(2)} + i[\delta_2(t) + kv_z] \rho_{21}^{(2)} + i\Omega_2(\rho_{11} - \rho_{22}); \\ \rho_{12} = \rho_{21}^*; \\ \text{Tr}\{\hat{\rho}\} = \rho_{11} + \rho_{22} = 1. \end{array} \right. \quad (3)$$

Здесь  $\delta_{1,2}(t) = \delta + \partial\Phi_{1,2}(t)/\partial t = \delta + \Delta_{1,2} \cos(f_m t)$  есть законы модуляции отстройки  $\delta = \omega - \omega_0$  частоты поля  $\omega$  от частоты перехода  $\omega_0$  для пробного поля и накачивающего поля соответственно,  $\Delta_{1,2} = \mu_{1,2} f_m$  – амплитуды модуляции пробной волны и волны накачки соответственно,  $v_z$  – проекция скорости атома (молекулы) на ось  $z$ . Далее,  $\Omega_1 = d_{21} E_1 / \hbar$  и  $\Omega_2 = d_{21} E_2 / \hbar$  есть частоты Раби для перехода  $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$  ( $d_{21}$  есть приведенный матричный элемент для перехода  $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ ),  $\gamma_{\text{sp}}$  есть скорость спонтанного распада верхнего уровня  $|2\rangle$ ,  $\gamma_{\text{opt}}$  есть общая скорость декогерентизации (спонтанная, столкновительная, пролетная) оптического перехода  $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ .

В качестве исследуемого сигнала рассматривается поглощение пробной волны, которое в приближении оптически тонкой среды определяется как:

$$A(t, kv_z) = 2 \text{Im}\{\Omega_1^* \rho_{21}^{(1)}(t, kv_z)\}. \quad (4)$$

Для стабилизации частоты обычно используется техника синхронного детектирования. В данной задаче это приводит к следующему выражению для сигнала ошибки как функции от отстройки  $\delta$ :

$$S_{\text{err}}(\delta) = \frac{1}{T} \frac{k}{\sqrt{\pi\omega_D}} \int_0^T \cos(f_m t + \phi) dt \int_{-\infty}^{+\infty} A(t, kv_z) e^{-\frac{(kv_z)^2}{\omega_D^2}} d(v_z), \quad (5)$$

где  $\omega_D$  – доплеровская ширина спектральной линии,  $T = 2\pi/f_m$  есть период модуляции,  $\cos(f_m t + \phi)$  есть опорный сигнал,  $\phi$  есть фазовый сдвиг опорного сигнала (фаза синхронного детектирования) по отношению к законам модуляции отстройки  $\delta_{1,2}(t)$ . При  $\phi = 0$  сигнал ошибки можно определить, как синфазный, а для  $\phi = -\pi/2$  – квадратурный.

Типичный вид сигнала ошибки (5) представлен на рисунке 2 и имеет форму дисперсионной кривой. Наклон кривой в центре линии определяется как:

$$K = \tan(\alpha) = \left. \frac{\partial S_{\text{err}}}{\partial \delta} \right|_{\delta=0}. \quad (6)$$

Относительная стабильность частоты пропорциональна величине  $|K|/N(f_m)$ , где  $N(f_m)$  есть спектральная плотность шумов на частоте  $f_m$ . В данной задаче необходимо исследовать и максимизировать величину  $|K|$ , которая зависит от конкретных параметров теоретической модели  $\{\Omega_1, \Omega_2, \mu_1, \mu_2, f_m, \phi, \gamma_{\text{sp}}, \gamma_{\text{opt}}, \omega_D\}$ .

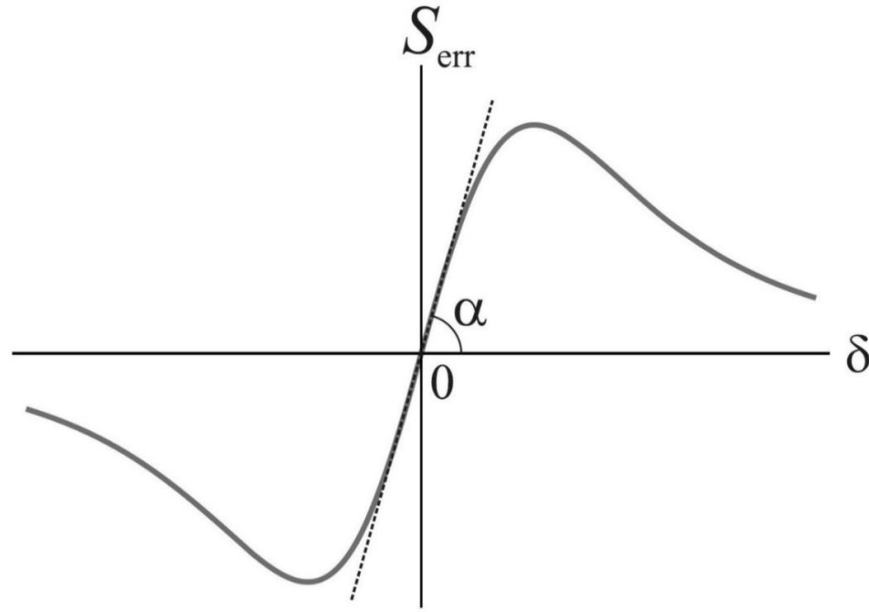
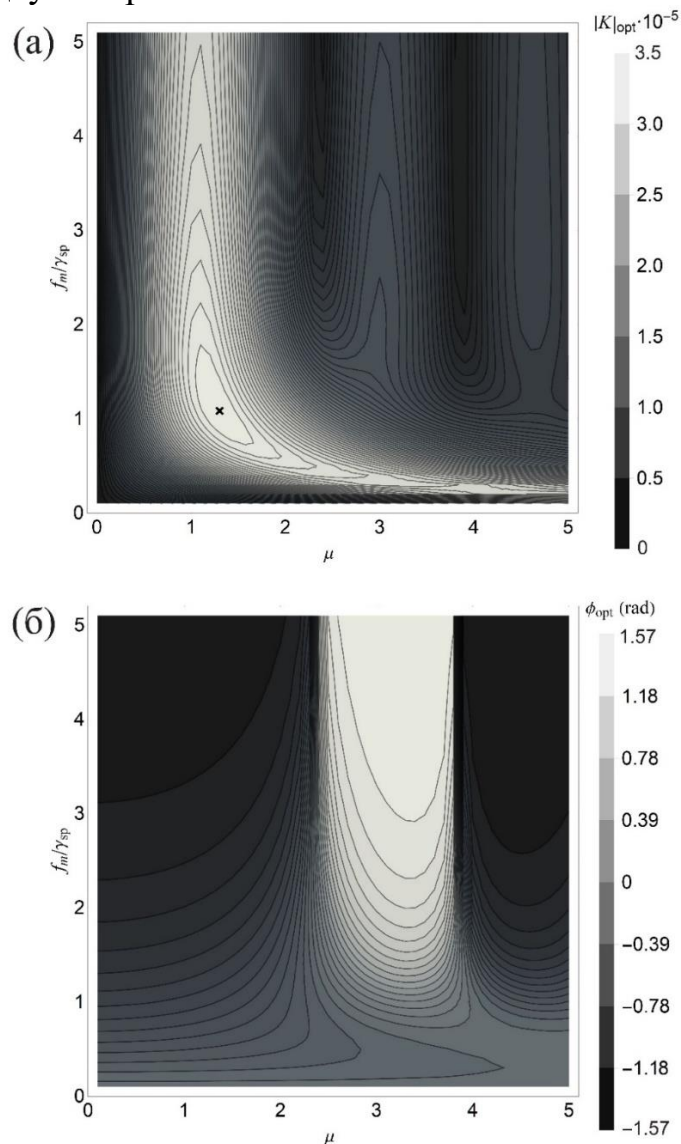


Рис. 2. Схематическое изображение сигнала ошибки  $S_{\text{err}}(\delta)$

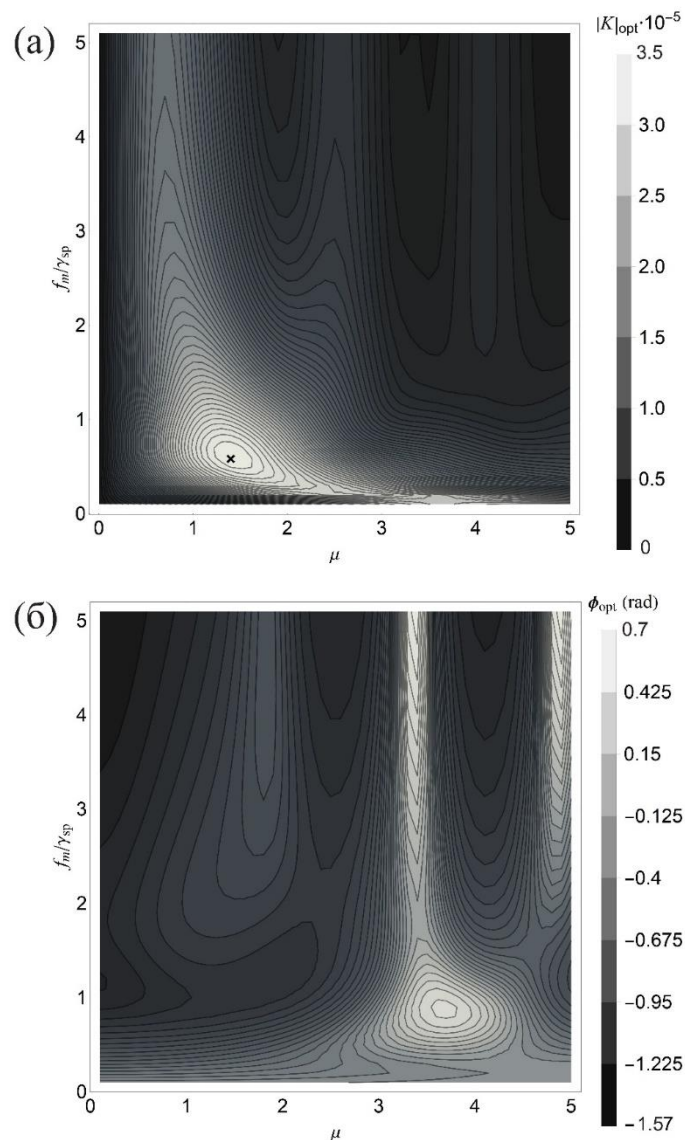
### 5.3 Полученные результаты

Были рассмотрены два разных варианта гармонической частотной модуляции лазерного поля: 1)  $\mu_1 = \mu$ ,  $\mu_2 = 0$  (модулируется частота только пробной волны) и 2)  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$  (осуществляется одинаковая модуляция частоты как пробного поля, так и поля накачки, которая образует частотно-модулированную стоячую волну). Все расчеты были проведены при доплеровской ширине  $\omega_D = 250\gamma_{\text{sp}}$ , соответствующей переходу в молекуле йода  $I_2$  на длине волны  $\lambda \approx 532$  нм. Наклон  $|K|$  сигнала ошибки (11) для заданных индекса и частоты модуляции можно максимизировать путем выбора оптимальной фазы  $\phi_{\text{opt}}$  опорного сигнала. На рисунках 3 и 4 представлены рассчитанные зависимости наклона сигнала ошибки  $|K|_{\text{opt}}$  (см. Рис. 3а и Рис. 4а) и соответствующей ему оптимальной фазы  $\phi_{\text{opt}}$  (см. Рис. 3б и Рис. 4б) от параметров модуляции ( $\mu, f_m$ ). Как видно из приведенных рисунков, зависимость наклона от параметров модуляции для обоих вариантов имеет вид параллельных «хребтов». При этом главный «хребет» (то есть с наибольшим  $|K|_{\text{opt}}$ ) вытянут в области высоких частот вдоль линии с индексом модуляции  $\mu \approx 1.1$  для первого варианта (т.е. когда гармонически модулируется частота только пробного поля) и  $\mu \approx 0.7$  для второго варианта (случай частотно-модулированной стоячей волны).

Соответствующая этой области оптимальная фаза опорного сигнала близка к  $-\pi/2$ , то есть в области высоких частот максимум наклона наблюдается для квадратурного сигнала ошибки. Для двух рассматриваемых вариантов модуляции частоты максимальные значения наклона  $|K|_{\max} = \max\{|K|_{\text{opt}}\}$  сопоставимы, однако достигаются при различных параметрах модуляции и фазах опорного сигнала. Для первого случая  $|K|_{\max}$  соответствует точке с  $\mu_{\text{opt}} \approx 1.3$ ,  $f_{m \text{ opt}} \approx 1.1\gamma_{\text{sp}}$  и фазе  $\phi_{\text{opt}} \approx -0.78$  рад  $\approx -45^\circ$ , а для второго случая –  $\mu_{\text{opt}} \approx 1.4$ ,  $f_{m \text{ opt}} \approx 0.6\gamma_{\text{sp}}$  и фазе  $\phi_{\text{opt}} \approx -0.94$  рад  $\approx -54^\circ$ . Таким образом, оптимальные режимы стабилизации, при которых достигается  $|K|_{\max}$ , находятся в промежуточной области между синфазным ( $\phi = 0$ ) и квадратурным ( $\phi = -\pi/2$ ) сигналами ошибки для обоих вариантов частотной модуляции поля двух встречных волн.



**Рис. 3.** Зависимость (а) наклона сигнала ошибки  $|K|_{\text{opt}}$  и (б) соответствующей оптимальной фазы  $\phi_{\text{opt}}$  опорного сигнала от индекса  $\mu$  и частоты  $f_m$  модуляции (модулируется частота только пробного поля). Положение максимального наклона отмечено крестиком. Численные параметры модели:  $\gamma_{\text{opt}} = 0.5\gamma_{\text{sp}}$ ,  $\omega_D = 250\gamma_{\text{sp}}$ ,  $\Omega_1 = 0.1\gamma_{\text{sp}}$ ,  $\Omega_2 = 0.5\gamma_{\text{sp}}$ .



**Рис. 4.** Зависимость (а) наклона сигнала ошибки  $|K|_{opt}$  и (б) соответствующей оптимальной фазы  $\phi_{opt}$  опорного сигнала от индекса  $\mu$  и частоты  $f_m$  модуляции (случай частотно-модулированной стоячей волны). Положение максимального наклона отмечено крестиком. Численные параметры модели:  $\gamma_{opt} = 0.5\gamma_{sp}$ ,  $\omega_D = 250\gamma_{sp}$ ,  $\Omega_1 = 0.1\gamma_{sp}$ ,  $\Omega_2 = 0.5\gamma_{sp}$ .

## 6. Эффект от использования кластера в достижении целей работы

Осуществление теоретических расчетов, результаты которых представлены выше, фактически является невозможным на персональных компьютерах из-за большого объема требуемой памяти, так и времени счета. Поэтому использование кластера, который позволяет проводить вычисления с высокой скоростью, является определяющим фактором для успешного достижения целей работы.

## 7. Публикация, содержащая результаты работы

Д.В. Коваленко, М.Ю. Басалаев, В.И. Юдин, “Оптимизация режимов стабилизации оптических стандартов частоты, основанных на резонансе насыщенного поглощения”, Оптика и спектроскопия, том 124, 600-604 (2018). (Импакт-фактор: 0,76).