

# Отчет о работе, выполненной на оборудовании Информационно-вычислительного центра НГУ.

**Наименование работы:** Плотный солитонный газ и формирование волн-убийц.

**Состав коллектива исполнителей:** Д.С. Агафонцев<sup>(a),(b)</sup>, к.ф.-м.н.; А.А. Гелаш<sup>(a)</sup>, к.ф.-м.н.

<sup>(a)</sup> Новосибирский государственный университет, Пирогова 2, 630090 Новосибирск, Россия.

<sup>(b)</sup> Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, Нахимовский проспект 36, 117218 Москва, Россия.

Должности в НГУ: Д.С. Агафонцев - м.н.с., А.А. Гелаш - н.с.

**Работа по гранту:** РНФ 14-22-00174, "Волновая турбулентность: теория, математическое моделирование, эксперимент 2014 – 2018, руководитель: В.Е. Захаров.

**Контактное лицо (ФИО, адрес электронной почты):** Агафонцев Дмитрий Сергеевич, Dmitry.Agafontsev@gmail.com; Гелаш Андрей Александрович, agelash@gmail.com.

## Научное содержание работы.

1. Постановка задачи. Численно изучаются свойства (статистически) однородного солитонного газа в зависимости от плотности солитонов (пропорциональной числу солитонов на единицу длины) и скорости солитонов в рамках фокусирующего одномерного нелинейного уравнения Шредингера (НУШ),

$$i\psi_t + \psi_{xx} + |\psi|^2\psi = 0. \quad (1)$$

Для моделирования такого газа мы используем  $N$ -солитонные решения ( $N$ -SS) с  $N \sim 100$ , которые мы генерируем с помощью определенной реализации метода одевания в сочетании со 100-значной арифметикой. Мы исследуем основные статистические характеристики, в частности кинетическую и потенциальную энергии, куртозис, спектр волнового действия и функцию плотности вероятности (PDF) интенсивности волн. Работа по построению многосолитонных решений выполняется А.А. Гелашем, работа по моделированию с помощью этих решений свойств пространственно однородного солитонного газа выполняется Д.С. Агафонцевым.

2. Современное состояние проблемы. Стандартным способом построения многосолитонных решений НУШ является "детерминантная" формула, см. например [S. Novikov, S.V. Manakov, L.P. Pitaevskii, V.E. Zakharov, *Springer Science & Business Media, New York*

$$\psi_{(N)}(x, t) = 2i \frac{\det \widetilde{M}}{\det M}, \quad M_{nm} = \frac{(\tilde{\mathbf{q}}_n \cdot \tilde{\mathbf{q}}_m^*)}{\lambda_n - \lambda_m^*},$$

$$\widetilde{M} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{q}_{1,2} & \cdots & \tilde{q}_{N,2} \\ \tilde{q}_{1,1}^* & & & \\ \vdots & & M_{nm}^T & \\ \tilde{q}_{N,1}^* & & & \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{q}}_n(x, t) &= (\tilde{q}_{n,1}, \tilde{q}_{n,2})^T = (e^{-\phi_n}, e^{\phi_n})^T, \\ \phi_n(x, t) &= -i\lambda_n(x - x_{0n}) - i\lambda_n^2 t - i\theta_n/2, \end{aligned} \quad (3)$$

и данные рассеяния для солитонов определяются как

$$\lambda_n = -v_n/2 + ia_n/2, \quad C_n = e^{i(\theta_n + 2\lambda_n x_{0n})}. \quad (4)$$

Здесь  $a_n$ ,  $v_n$ ,  $x_{0n}$  и  $\theta_n$  - соответственно, амплитуда, скорость, положение и комплексная фаза  $n$ -ого солитона. Однако на практике сгенерировать  $N$ -SS с помощью этой формулы не получается из-за плохой обусловленности соответствующих матриц уже для  $N \sim 10$ . Поэтому динамика многосолитонных решений, как и их статистические свойства, до сих пор не были изучены.

3. Описание работы, включая используемые алгоритмы. Для построения  $N$ -SS с  $N \sim 100$  А.А. Гелашем использован специальный тип метода одевания вместе со 100-значной арифметикой. Для последующего моделирования эволюции применяется псевдоспектральный метод Рунге-Кутты 4-ого порядка точности на адаптивной решетке с Фурье-интерполяцией, хорошо сохраняющий первые 10 интегралов движения с относительной ошибкой менее  $10^{-6}$ . Для исследования статистических свойств необходимо выполнить усреднение результатов по ансамблю начальных условий, для чего нужно выполнить численное моделирование эволюции с этих начальных условий. Для нахождения эволюции ансамбля выполняется распределение нагрузки на вычислительный комплекс так, что каждое ядро каждого из используемых узлов комплекса выполняет моделирование последовательно нескольких реализаций из ансамбля. Затем выполняется усреднение полученных результатов.

4. Результаты. В рамках работы впервые сгенерированы многосолитонные решения с числом солитонов порядка 100 и с их помощью изучены свойства плотного статистически однородного солитонного газа. В частности, мы показываем, что в случае малой солитонной плотности кинетическая и потенциальная энергии, а также куртозис очень хорошо описываются аналитическими соотношениями, полученными без учета солитонных взаимодействий. С увеличением плотности солитонов и скоростей солитонные взаимодействия усиливаются, и мы наблюдаем возрастающие отклонения от этих соотношений, приводящие к увеличению абсолютных значений для всех этих трех характеристик. Спектр волнового действия является гладким, затухает экспоненциально на больших волновых

числах и расширяется с увеличением плотности солитонов и скоростей. PDF интенсивности волн сильно отличается от экспоненциального (рэлеевского) PDF для разреженного солитонного газа, значительно приближаясь к нему при плотностях, соответствующих существенному взаимодействию между солитонами. Волны-убийцы, возникающие в солитонном газе, являются многосолитонными столкновениями, и все же некоторые из них имеют пространственные профили очень сходные с таковыми для решений Перегринна различных порядков. Мы приводим пример трехсолитонного столкновения, для которого даже временное поведение максимальной амплитуды очень хорошо аппроксимируется решением Перегринна второго порядка.

По результатам работы опубликована статья: A.A. Gelash, D.S. Agafontsev, *Strongly interacting soliton gas and formation of rogue waves*, Phys. Rev. E **98**, 042210 (2018). [dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.98.042210](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.98.042210)

### 5. Иллюстрации, визуализация результатов.

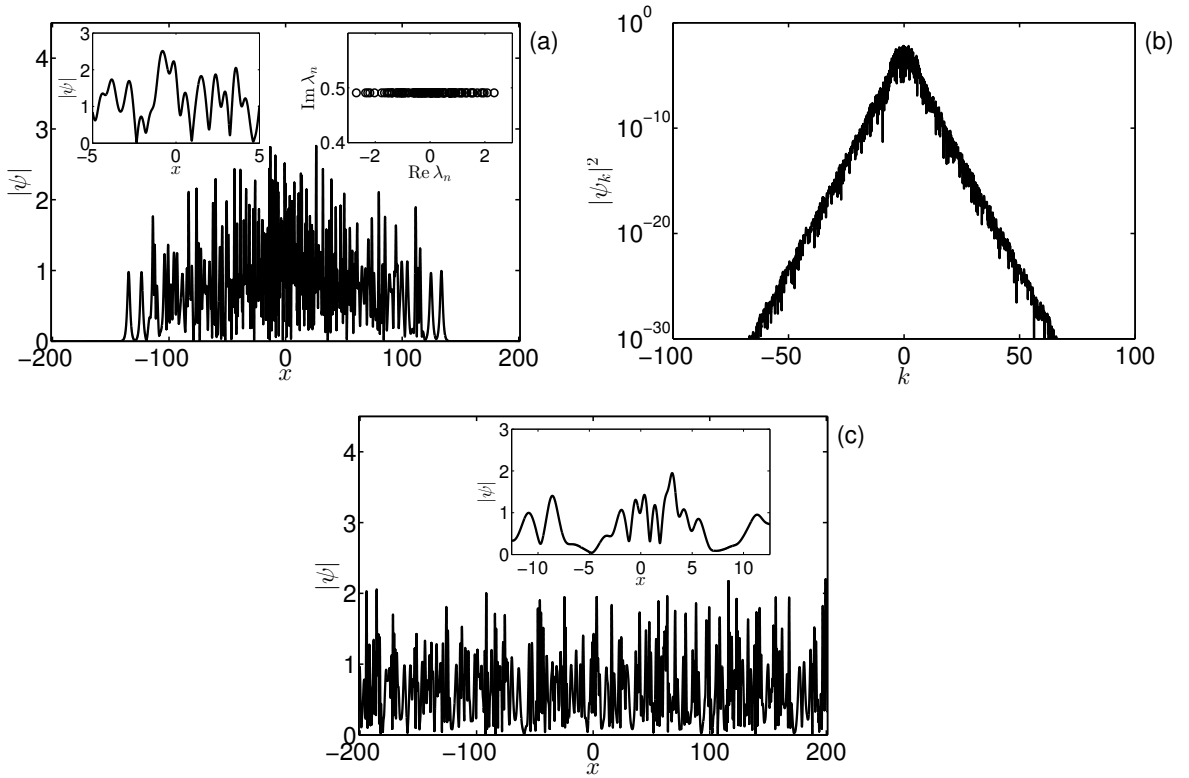


Рис. 1: (a) Волновое поле 128-SS в начальный момент времени  $t = 0$ , (b) его спектр Фурье  $|\psi_k|^2$  и (c) волновое поле для этого же 128-SS при  $t = 200$ . Моделирование происходит в ящике  $x \in [-L/2, L/2]$ ,  $L = 128\pi$ , плотность солитонов равна  $\rho \approx 0.65$ , амплитуды равны,  $a_n = A = \pi/3.2$ , а скорости распределены по Гауссу,  $v_n \sim \mathcal{N}(0, V_0^2)$ ,  $V_0 = 2$ . Левая вставка на рисунке (a) и вставка на рисунке (c) иллюстрируют волновое поле в центре ящика, а правая вставка на рисунке (a) показывает собственные значения  $\lambda_n$ ,  $n = 1, \dots, 128$ .

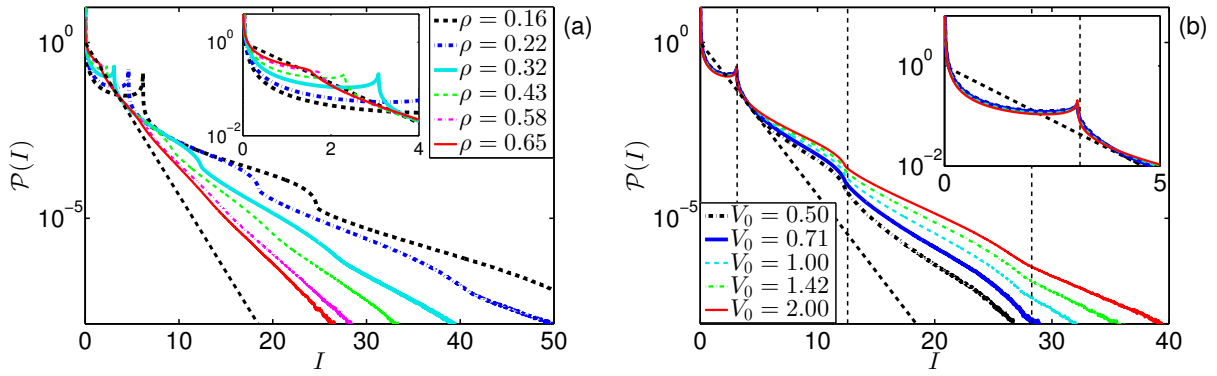


Рис. 2: (Color on-line) (а) PDF  $\mathcal{P}(I)$  для статистически однородного солитонного газа в зависимости от плотности солитонов  $\rho$ . Солитонный газ имеет равные амплитуды  $a_n = A = \pi/3.2$  и характерную скорость  $V_0 = 2$ ; мы моделируем его с помощью 128-SS. Пунктирная линия - экспоненциальная PDF  $\mathcal{P}_R(I)$ , на вставке показана PDF с малой и умеренной относительной интенсивностью  $I$ . (б) PDF  $\mathcal{P}(I)$  для солитонного газа в зависимости от характерной скорости солитона  $V_0$ . Пунктирная линия показывает экспоненциальную PDF  $\mathcal{P}_R(I)$ .

**Эффект от использования кластера в достижении целей работы.** Использование кластера является необходимым при выполнении данной работы, так как для исследований приходится набирать значительную статистику (1000 и более реализаций начальных условий), что требует значительных вычислительных ресурсов.

**Перечень публикаций, содержащих результаты работы:**

1. A.A. Gelash, D.S. Agafontsev, *Strongly interacting soliton gas and formation of rogue waves*, Phys. Rev. E **98**, 042210 (2018). [dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.98.042210](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.98.042210)

**Ваши впечатления от работы вычислительной системы и деятельности ИВЦ НГУ, а также Ваши предложения по их совершенствованию:**

Вычислительная система работает достаточно стабильно, специальных предложений по совершенствованию системы нет.