

# Отчет о работе, выполненной на оборудовании Информационно-вычислительного центра НГУ.

**Наименование работы:** Развитие структур высокой завихренности и геометрические свойства преобразования вихревых линий.

**Состав коллектива исполнителей:** Д.С. Агафонцев<sup>(a),(b)</sup>, к.ф.-м.н.; Е.А. Кузнецов<sup>(a),(c)</sup>, профессор, академик РАН.

<sup>(a)</sup> Новосибирский государственный университет, Пирогова 2, 630090 Новосибирск, Россия.

<sup>(b)</sup> Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, Нахимовский проспект 36, 117218 Москва, Россия.

<sup>(c)</sup> Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, Ленинский проспект 53, 119991 Москва, Россия.

Должности в НГУ: Д.С. Агафонцев - м.н.с., Е.А. Кузнецов - г.н.с.

**Работа по гранту:** РНФ 14-22-00174, "Волновая турбулентность: теория, математическое моделирование, эксперимент 2014 – 2018, руководитель: В.Е. Захаров.

**Контактное лицо (ФИО, адрес электронной почты):** Агафонцев Дмитрий Сергеевич, Dmitry.Agafontsev@gmail.com; Кузнецов Евгений Александрович, kuznetso@itp.ac.ru.

## Научное содержание работы.

1. Постановка задачи. Исследуется численно развитие структур высокой завихренности  $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v}$ , появляющихся в рамках трехмерных несжимаемых уравнений Эйлера,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

из периодических крупномасштабных начальных условий произвольного вида. Согласно нашим предыдущим исследованиям, см. например [D.S. Agafontsev et al, *Phys. Fluids* 27, 085102 (2015)], подобные структуры имеют форму "блинов" и эволюционируют согласно скейлингу  $\omega_{\max} \propto \ell^{-2/3}$  между максимумом завихренности и толщиной блина. Предполагается изучить данный процесс с точки зрения (сжимаемого) преобразования вихревых линий (ПВЛ) и найти аналитическое объяснение скейлингу 2/3.

2. Современное состояние проблемы. Представление вихревых линий было впервые введено в работе [E.A. Kuznetsov, V.P. Ruban, *J. Exp. Theor. Phys. Letters* 67, pp. 1076–1081 (1998)] и представляет собой отображение от Эйлеровых координат жидкости к Лагранжевым маркерам вихревых линий. Одновременно, ПВЛ является результатом частичного интегрирования уравнений Эйлера, для которого инварианты Коши сохраняются в явном виде. Переход к уравнениям ПВЛ, таким образом, позволяет изучить динамику отдельных вихревых линий и, кроме того, обеспечивает сохранение инвариантов Коши до уровня

ошибки округления, что является значительным достижением в точности и контроле численного моделирования уравнений Эйлера. Однако до сих пор не было представлено ни одной работы где было бы выполнено численное моделирование уравнений ПВЛ на решетках высокой точности.

3. Описание работы, включая используемые алгоритмы. Уравнения ПВЛ, см. [E. A. Kuznetsov, *J. Fluid Mech.* 600, pp. 167–180 (2008)], моделируются с помощью псевдоспектрального метода Рунге-Кутты 4-ого порядка точности на адаптивной трехмерной решетке с Фурье-интерполяцией. Число точек вдоль каждого из трех направлений меняется независимо от других направлений. Во время эволюции системы энергия и спиральность сохраняются с относительной точностью  $10^{-11}$ . Для подавления горловой неустойчивости используется фильтрация с функцией предложенной в работе [T.Y. Hou, R. Li, *J. Comp. Phys.* 226, pp. 379–397 (2007)],

$$\rho(\mathbf{k}) = \exp \left( -36 \left[ \left( \frac{k_x}{K_x} \right)^{36} + \left( \frac{k_y}{K_y} \right)^{36} + \left( \frac{k_z}{K_z} \right)^{36} \right] \right),$$

где  $k_{xyz}$  - проекции волнового вектора, а  $K_{xyz}$  - максимальные значения волнового вектора вдоль соответствующих направлений.

4. Результаты. Процесс развития блинов изучен в терминах ПВЛ. Впервые выполнено моделирование уравнений ПВЛ с высокой точностью – на адаптивных анизотропных решетках с числом узлов вплоть до  $1536^3$ . С помощью этого моделирования мы показываем, что рост завихренности связан со сжимаемостью вихревых линий и находим аналитическое объяснение скейлингу  $\omega_{\max} \propto \ell^{-2/3}$  через геометрические свойства ПВЛ.

По результатам работы опубликована статья: D.S. Agafontsev, E.A. Kuznetsov, A.A. Mailybaev, *Development of high vorticity structures and geometrical properties of the vortex line representation*, *Phys. Fluids* **30**, 095104 (2018). [dx.doi.org/10.1063/1.5049119](https://doi.org/10.1063/1.5049119)

## 5. Иллюстрации, визуализация результатов.

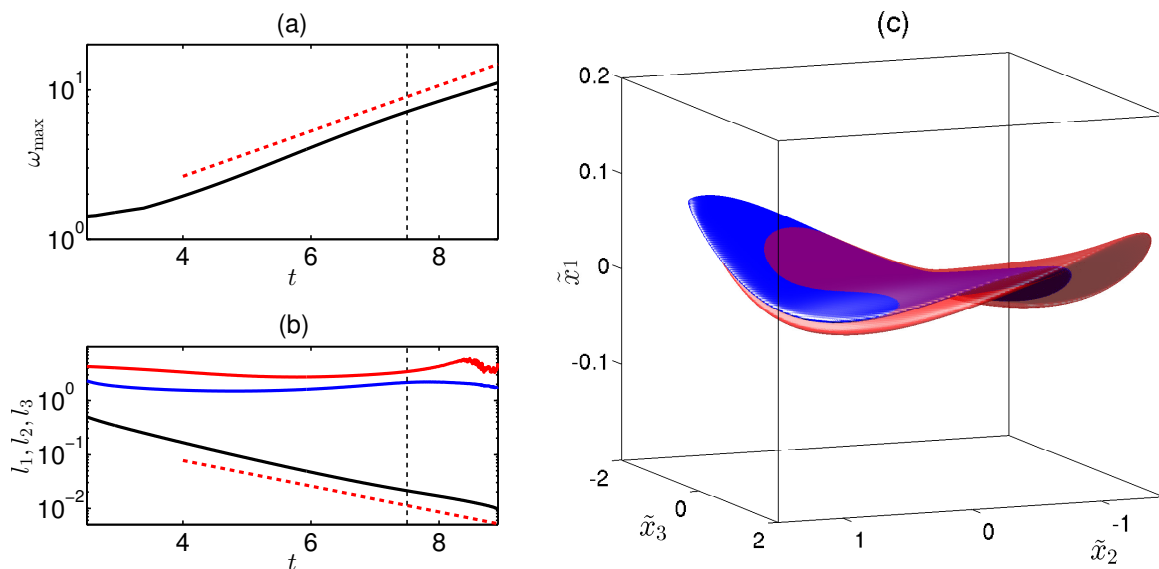


Рис. 1: (а) Глобальный максимум завихренности как функция времени (логарифмическая вертикальная шкала) для прямого моделирования уравнений Эйлера. Красная пунктирная линия указывает наклон  $\propto e^{\beta_2 t}$  с  $\beta_2 = 0.35$ . Вертикальная пунктирная линия отмечает конечное время  $t = 7.5$  для моделирования уравнений ПВЛ. (б) Эволюция во времени характерных пространственных масштабов  $l_1$  (черный),  $l_2$  (синий) и  $l_3$  (красный) для соответствующей структуры завихренности блина. Красная пунктирная линия указывает наклон  $\propto e^{-\beta_1 t}$  с  $\beta_1 = 0.55$ . (с) Изоповерхности завихренности  $|\omega| = 0.8\omega_{\max}$  (прозрачный красный) и якобиана  $J = 1.25J_{\min}$  (синий) в локальных  $\tilde{\mathbf{x}}$ -координатах при  $t = 7.5$ ; симуляция уравнений ПВЛ.

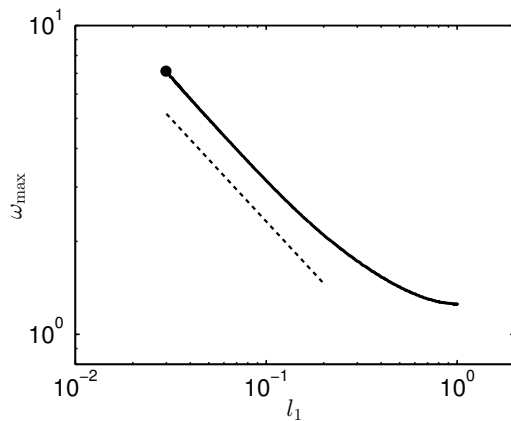


Рис. 2: Максимум завихренности  $\omega_{\max}$  в зависимости от толщины блина  $l_1$  в логарифмическом масштабе во время эволюции блина. Кругом отмечен максимум завихренности в последний момент времени  $t = 7.5$ , а пунктирной линией обозначен степенной закон  $\omega_{\max} \propto l_1^{-2/3}$ .

**Эффект от использования кластера в достижении целей работы.** Использование кластера является необходимым при выполнении данной работы. Моделирование эволюции системы на решетках с общим числом узлов  $1536^3$  требует более 1 Тб RAM. При этом, вся эта память должна быть связана с центральными процессорами по наиболее скоростному интерфейсу. В вычислительном центре НГУ подобными характеристиками обладают только машины vкор2 и vкор3. Аккуратное моделирование эволюции системы требует также длительного времени счета.

**Перечень публикаций, содержащих результаты работы:**

1. D.S. Agafontsev, E.A. Kuznetsov, A.A. Mailybaev, *Development of high vorticity structures and geometrical properties of the vortex line representation*, Phys. Fluids **30**, 095104 (2018). [dx.doi.org/10.1063/1.5049119](https://doi.org/10.1063/1.5049119)

**Ваши впечатления от работы вычислительной системы и деятельности ИВЦ НГУ, а также Ваши предложения по их совершенствованию:**

Вычислительная система работает достаточно стабильно, специальных предложений по совершенствованию системы нет.