

# Отчет о работе, выполненной на оборудовании Информационно-вычислительного центра НГУ.

**Наименование работы:** Развитие структур высокой завихренности в несжимаемых трехмерных уравнениях Эйлера.

**Состав коллектива исполнителей:** Д.С. Агафонцев<sup>(a),(b)</sup>, к.ф.-м.н.; Е.А. Кузнецов<sup>(a),(c)</sup>, профессор, академик РАН.

<sup>(a)</sup> Новосибирский государственный университет, Пирогова 2, 630090 Новосибирск, Россия.

<sup>(b)</sup> Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, Нахимовский проспект 36, 117218 Москва, Россия.

<sup>(c)</sup> Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, Ленинский проспект 53, 119991 Москва, Россия.

Должности в НГУ: Д.С. Агафонцев - м.н.с., Е.А. Кузнецов - главный научный сотрудник.

**Работа по гранту:** РФФИ 14-22-00174, "Волновая турбулентность: теория, математическое моделирование, эксперимент 2014 – 2016, руководитель: В.Е. Захаров.

**Контактное лицо (ФИО, адрес электронной почты):** Агафонцев Дмитрий Сергеевич, Dmitry.Agafontsev@gmail.com; Кузнецов Евгений Александрович, kuznetso@itp.ac.ru.

## Научное содержание работы.

1. Постановка задачи. Исследуется численно развитие структур с высокой завихренностью  $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v}$ , появляющихся в рамках трехмерных несжимаемых уравнений Эйлера,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

из периодических крупномасштабных начальных условий произвольного вида. Согласно предыдущим исследованиям, см. например М.Е. Brachet, М. Meneguzzi, А. Vincent, Н. Politano, Р.Л. Sulem, Phys. Fluids A, vol. 4, pp. 2845–2854 (1992), подобные структуры могут иметь форму "блинов". Предполагается найти временную зависимость максимума завихренности на блине, толщины блина, связь между максимумом завихренности и толщиной, и исследовать спектр кинетической энергии и распределение структур высокой завихренности по размерам.

2. Современное состояние проблемы. Согласно теореме Beale-Kato-Majda, если в трехмерных несжимаемых уравнениях Эйлера или Навье-Стокса существует коллапс в некоторый момент времени  $t_0$ , то интеграл от максимума завихренности в этот момент должен расходиться,

$$\int_0^{t_0} \omega_{\max}(t) dt = +\infty, \quad \omega_{\max}(t) = \max_{\mathbf{r}} |\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})|.$$

Это означает, что коллапс в таких уравнениях характеризуется бесконечной завихренностью,  $\omega_{\max}(t_0) = +\infty$ . Согласно ранним численным исследованиям, при моделировании уравнений Эйлера структуры высокой завихренности действительно появляются со временем, и максимум завихренности растет. Для произвольных периодических крупномасштабных начальных условий такие структуры имеют форму блина, толщина которого экспоненциально уменьшается, а завихренность в блине - экспоненциально растет. В частности, в статье М.Е. Brachet, М. Meneguzzi, А. Vincent, Н. Politano, Р.Л. Sulem, Phys. Fluids A, vol. 4, pp. 2845–2854 (1992) было предложено асимптотическое решение для блина, в котором максимум завихренности обратно пропорционален толщине блина. Образование подобных квази-одномерных структур должно приводить к подавлению нелинейности, когда временная производная завихренности становится пропорциональной самой завихренности, что и обуславливает экспоненциальный рост. При таком сценарии коллапс за конечное время не является ожидаемым событием. Поэтому дальнейшие численные исследования были сконцентрированы на поиске специальных начальных условий, которые обеспечивали бы усиленный рост завихренности. Тем не менее, несмотря на значительные усилия, до сих пор нет

надежного ответа на вопрос о существовании коллапсов в уравнениях Эйлера и/или Навье-Стокса. Поэтому в нашей работе мы решили провести исследования в других направлениях, а именно, во-первых, вернуться к произвольным начальным условиям, и, во-вторых, исследовать не только главный максимум завихренности, но и все остальные локальные максимумы.

3. Описание работы, включая используемые алгоритмы. Для моделирования эволюции системы используется метод Рунге-Кутты 4-ого порядка точности на адаптивной трехмерной решетке с Фурье-интерполяцией. Число точек вдоль каждого из трех направлений меняется независимо от других направлений. Во время эволюции системы энергия и спиральность сохраняются с точностью  $10^{-11}$ . Для подавления горловой неустойчивости используется фильтрация с функцией предложенной в статье T.Y. Hou, R. Li, J. Comp. Phys., vol. 226, no. 1, pp. 379–397 (2007),

$$\rho(\mathbf{k}) = \exp \left( -36 \left[ \left( \frac{k_x}{K_x} \right)^{36} + \left( \frac{k_y}{K_y} \right)^{36} + \left( \frac{k_z}{K_z} \right)^{36} \right] \right),$$

где  $k_{xyz}$  - проекции волнового вектора, а  $K_{xyz}$  - максимальные значения волнового вектора вдоль соответствующих направлений.

4. Результаты. Структуры высокой завихренности появляются во множестве и имеют форму тонких листов завихренности (блинов). Наш анализ показывает самоподобную эволюцию блинов, которая управляется двумя различными экспонентами  $e^{-t/T_\ell}$  и  $e^{-t/T_\omega}$ , описывающими соответственно сжатие в поперечном направлении и рост завихренности, с универсальным соотношением  $T_\ell/T_\omega = 2/3$ . В работе предложено новое точное решение уравнений Эйлера для описания асимптотической эволюции подобных блинов. Это решение является комбинацией сдвигового течения и асимметричного растягивающего потока, и характеризуется параметром асимметрии и произвольным поперечным профилем завихренности. Анализ основан на детальном сравнении с результатами численного моделирования, которое выполнялось с использованием псевдо-спектральных методов на анизотропных решетках вплоть до  $972 \times 2048 \times 4096$ .

Мы связываем развитие подобных блинообразных структур с постепенным формированием Колмогоровского спектра энергии  $E_k k^{-5/3}$ , который мы наблюдаем в полностью невязкой системе. С помощью спектрального анализа мы показываем, что перенос энергии на малые масштабы осуществляется через блины, которые аккумулируются в Колмогоровском интервале масштабов и эволюционируют согласно скейлингу  $\omega_{\max} \sim \ell^{-2/3}$  между максимумом завихренности и поперечным размером блина. С помощью массивного численного моделирования, мы исследуем влияние начальных условий на формирование блинов и развитие Колмогоровского спектра энергии.

5. Иллюстрации, визуализация результатов.

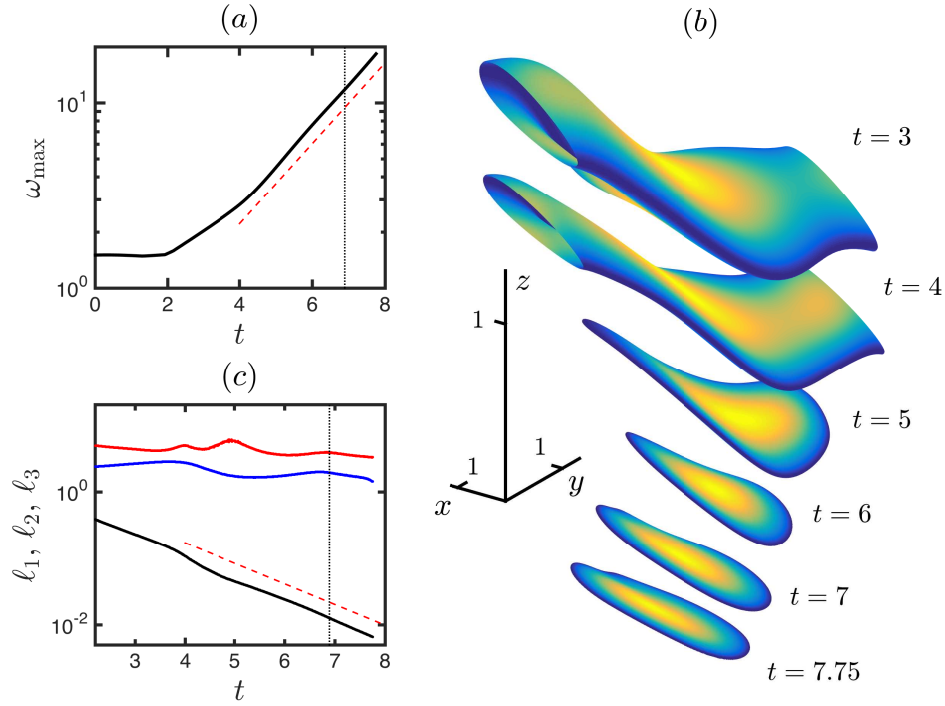


Рис. 1: (a) Глобальный максимум завихренности как функция времени (логарифмический вертикальный масштаб). Красная пунктирная линия показывает зависимость  $\propto e^{\beta_2 t}$  для  $\beta_2 = 0.36$ . (b) Изоповерхность модуля завихренности  $\omega = 0.85 \omega_{\max}(t)$  в разные моменты времени. Структуры сдвинуты для лучшей визуализации. (c) Временная эволюция характерных пространственных масштабов структуры высокой завихренности  $\ell_1$  (черный),  $\ell_2$  (синий) и  $\ell_3$  (красный). Красная пунктирная линия показывает зависимость  $\propto e^{-\beta_1 t}$  для  $\beta_1 = 0.59$ .

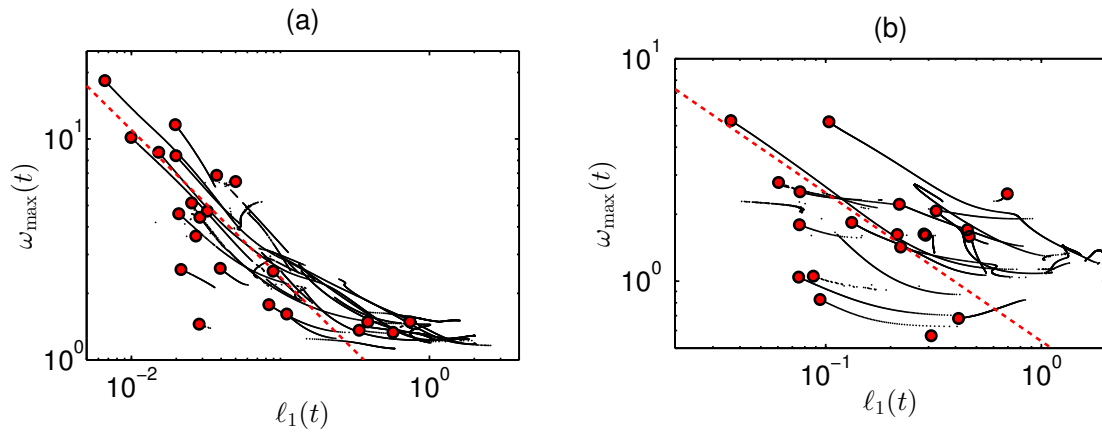


Рис. 2: (a) Соотношение между локальными максимумами завихренности  $\omega_{\max}(t)$  и соответствующими характерными толщинами  $\ell_1(t)$  во время эволюции блинообразных структур. Линии изображают эволюцию со временем, красные круги обозначают положение в финальный момент времени. Красная пунктирная линия показывает степенной скейлинг  $\omega_{\max} \propto \ell_1^{-2/3}$ . (b) Такой же график для другого начального условия.

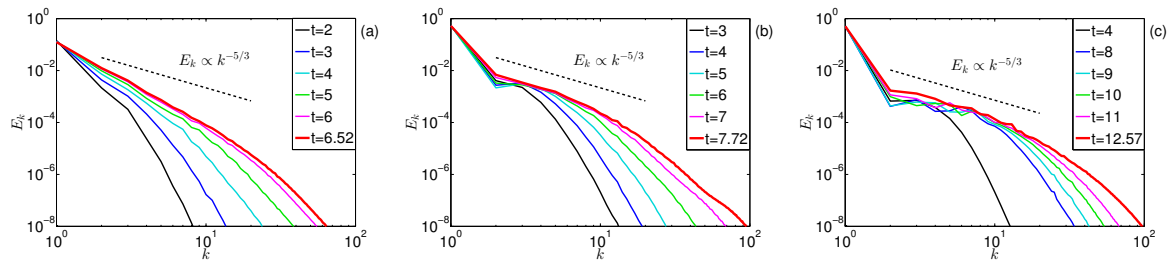


Рис. 3: (*Color on-line*) Эволюция спектра энергии  $E_k(t)$  для трех характерных начальных условий  $IC_1$ ,  $IC_2$  и  $IC_3$ .

**Эффект от использования кластера в достижении целей работы.** Использование кластера является необходимым при выполнении данной работы. Моделирование эволюции системы на решетке с общим числом узлов  $1024^3$  требует примерно 160 Гб RAM, а на решетке  $2048^3$  – уже 1.3 Тб RAM. При этом, вся эта память должна быть связана с центральными процессорами по наиболее скоростному интерфейсу. В вычислительном центре НГУ подобными характеристиками обладают только машины vкор2 и vкор3. Аккуратное моделирование эволюции системы требует также длительного времени счета.

#### Перечень публикаций, содержащих результаты работы:

1. D.S. Agafontsev, E.A. Kuznetsov, A.A. Mailybaev, *Development of high vorticity structures in incompressible 3D Euler equations*, Phys. Fluids **27**, 085102 (2015). [dx.doi.org/10.1063/1.4927680](https://doi.org/10.1063/1.4927680)
2. D.S. Agafontsev, E.A. Kuznetsov, A.A. Mailybaev, *Development of high vorticity in incompressible 3D Euler equations: influence of initial conditions*, JETP Lett. **104**, 685–689 (2016). [dx.doi.org/10.1134/S002136401622001X](https://doi.org/10.1134/S002136401622001X)
3. D.S. Agafontsev, E.A. Kuznetsov, A.A. Mailybaev, *Asymptotic solution for high-vorticity regions in incompressible three-dimensional Euler equations*, J. Fluid Mech. **813**, R1 (2017). [dx.doi.org/10.1017/jfm.2017.1](https://doi.org/10.1017/jfm.2017.1)

**Ваши впечатления от работы вычислительной системы и деятельности ИВЦ НГУ, а также Ваши предложения по их совершенствованию:**

Вычислительная система работает достаточно стабильно, специальных предложений по совершенствованию системы нет.