

# Отчет о работе, выполненной на оборудовании Информационно-вычислительного центра НГУ.

**Наименование работы:** Спонтанная модуляционная неустойчивость эллиптических периодических волн: модель солитонного конденсата.

**Состав коллектива исполнителей:** Агафонцев Дмитрий Сергеевич<sup>(a,b)</sup>, к.ф.-м.н., с.н.с.

<sup>(a)</sup> Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, Нахимовский проспект 36, 117997 Москва, Россия.

<sup>(b)</sup> Сколковский институт науки и технологий, Большой бульвар 30, стр.1, 121205 Москва, Россия.

## Контакты:

Агафонцев Дмитрий Сергеевич, Dmitry.Agafontsev@gmail.com

**Работа по гранту:** РНФ 19-72-30028, “Турбулентность и когерентные структуры в интегрируемых и неинтегрируемых системах”, 2023 – 2025, руководитель Е.А. Кузнецов.

## Научное содержание работы.

1. Постановка задачи. Численно изучается соответствие между статистикой асимптотического статистически стационарного состояния спонтанной (вызванной шумом) модуляционной неустойчивости (МН)  $dn$ -кноидальных волн и статистикой солитонного газа с нулевыми скоростями, случайными фазами и определенным распределением солитонов по амплитудам, в рамках фокусирующего одномерного нелинейного уравнения Шредингера (НУШ),

$$i\psi_t + \psi_{xx} + 2|\psi|^2\psi = 0. \quad (1)$$

Моделирование МН выполняется согласно опубликованной нами более ранней работе, D.S. Agafontsev, V.E. Zakharov, *Nonlinearity* **29**, 3551–3578 (2016). Моделирование солитонного газа выполняется согласно схеме, впервые разработанной в другой нашей работе, А.А. Gelash, D.S. Agafontsev, *Phys. Rev. E* **98**, 042210 (2018). Распределение солитонов по амплитудам, которое позволяет моделировать  $dn$ -кноидальные волны, было получено в работе T. Congy et al, *J. Nonlinear Sci.* **33**, p. 104 (2023).

2. Современное состояние проблемы. Данная задача является новой, т.к. методы позволяющие ее исследовать были впервые разработаны в нашей работе А.А. Gelash, D.S. Agafontsev, *Phys. Rev. E* **98**, 042210 (2018), а распределение солитонов по амплитудам, необходимое чтобы моделировать  $dn$ -кноидальные волны, было впервые найдено в недавней работе T. Congy et al, *J. Nonlinear Sci.* **33**, p. 104 (2023). Положительный ответ на вопрос о возможности моделировать МН с помощью солитонного газа дает возможность изучать ее аналитически с помощью кинетической теории солитонного газа, а также по-другому ставит вопрос о природе волн-убийц, появляющихся в НУШ-подобных системах, а именно, что большие волны могут быть следствием взаимодействия большого числа солитонов.

3. Описание работы, включая используемые алгоритмы. Для построения многосолитонных решений, моделирующих солитонный газ, был использован специальный вариант метода одеяния вместе с арифметикой 1000-значной точности. Для последующего моделирования эволюции применялся псевдоспектральный метод Рунге-Кутты 4-ого порядка точности на адаптивной решетке с Фурье-интерполяцией, хорошо сохраняющий первые 10 интегралов движения с относительной ошибкой менее  $10^{-6}$ . Для исследования статистических свойств было необходимо выполнить усреднение результатов по ансамблю начальных условий. Для нахождения эволюции ансамбля нагрузка на вычислительный комплекс распределялась так, чтобы каждое ядро каждого из используемых узлов комплекса выполняло моделирование последовательно нескольких реализаций из ансамбля. Затем производилось усреднение и обработка полученных результатов.

4. Результаты. В рамках работы, сгенерированы несколько солитонных газов, соответствующих кноидальным волнам с различными значениями эллиптического модуля  $m$ , и изучены их основные статистические функции, усредненные по ансамблю и времени. Также проведено моделирование статистически стационарного состояния МН, развивающейся из этих кноидальных волн. Показано, что статистические функции для солитонных газов с очень высокой степенью точности совпадают со статистическими функциями для МН. Основываясь на разработанной нами солитонной модели МН кноидальных волн, с помощью кинетической теории солитонного газа доказано соотношение между потенциальной  $H_{nl}$  и кинетической  $H_l$  энергиями в асимптотическом статистически стационарном состоянии,  $\langle H_{nl} \rangle / \langle H_l \rangle = -2$ , а также в этом же состоянии аналитически найдено выражение для куртозиса  $\kappa_4 = \langle |\psi|^4 \rangle / \langle |\psi|^2 \rangle^2$  волнового поля, которое точно соответствует результатам численных экспериментов. Также объяснена природа временных осцилляций куртозиса в нелинейной фазе МН и аналитически найдена частота этих осцилляций, совпадающая с результатами численного моделирования.

По результатам работы подготовлена к публикации статья: D.S. Agafontsev, T. Congy, G.A. El, S. Randoux, G. Roberti, P. Suret, *Spontaneous modulational instability of elliptic periodic waves: the soliton condensate model*, preprint arXiv:2411.06922v1 (2024).

## 5. Иллюстрации, визуализация результатов.

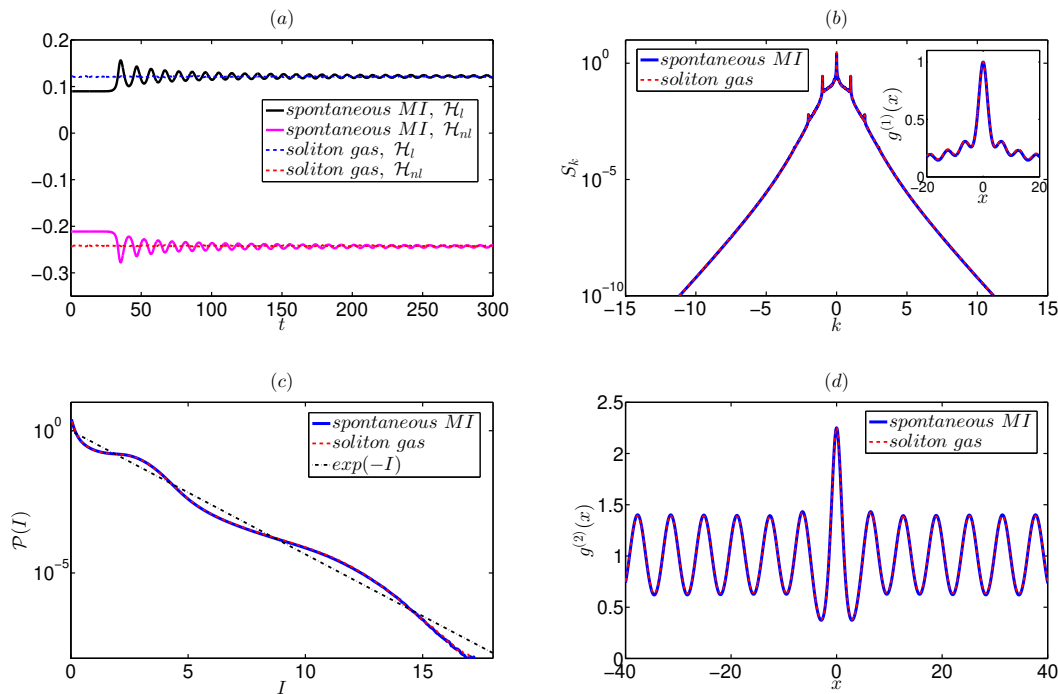


Рис. 1: (Color online) Сравнение усредненных по ансамблю статистических характеристик между спонтанной (вызванной шумом) МН и 128-солитонными решениями со случайной фазой: (a) временная эволюция кинетической  $\langle \mathcal{H}_l \rangle$  и потенциальной  $\langle \mathcal{H}_{nl} \rangle$  энергий, (b) спектр Фурье  $S_k$ , (c) PDF  $\mathcal{P}(I)$  относительной интенсивности волны  $I = |\psi|^2 / \langle |\psi|^2 \rangle$  и (d) автокорреляция интенсивности  $g^{(2)}(x)$ . Панели (b,c,d) сравнивают статистические функции между асимптотическим статистически стационарным состоянием спонтанной МН и 128-солитонными решениями со случайными фазами; статистические функции здесь дополнительно усреднены по временным интервалам. Черная штрихпунктирная линия на панели (c) показывает экспоненциальное распределение  $\mathcal{P}_e(I) = e^{-I}$ , а вставка на панели (b) показывает корреляционную функцию  $g^{(1)}(x)$ .

**Эффект от использования кластера в достижении целей работы.** Использование кластера являлось необходимым при выполнении данной работы, так как для исследований приходится набирать значительную статистику (1000 реализаций начальных условий для каждого численного эксперимента), что требует значительных вычислительных ресурсов.

**Перечень публикаций, содержащих результаты работы:**

1. D.S. Agafontsev, T. Congy, G.A. El, S. Randoux, G. Roberti, P. Suret, *Spontaneous modulational instability of elliptic periodic waves: the soliton condensate model*, preprint arXiv:2411.06922v1 (2024).

**Ваши впечатления от работы вычислительной системы и деятельности ИВЦ НГУ, а также Ваши предложения по их совершенствованию:**

Вычислительная система работает достаточно стабильно, специальных предложений по совершенствованию системы нет.