

Отчет о проделанной работе с использованием оборудования ИВЦ НГУ

1. Аннотация

Проект был посвящён исследованию гидродинамики двумерных волн, распространяющихся на поверхности трехмерной идеальной несжимаемой глубокой жидкости в поле тяжести. Для описания динамики таких волн были предложены две новые гамильтоновы модели, идея вывода которых основана на использовании компактных форм уравнения Захарова. В качестве физической задачи рассматривалась динамика стоячих волн в канале с гладкими вертикальными стенками. Результаты численного моделирования показали изотропизацию спектра во времени в обеих предложенных моделях, и дальнейшим возникновением волн, направленных во все стороны. Сходство общей динамики в обеих моделях, а также их сходство с уравнением Захарова, позволяет сделать вывод о том, что обе модели могут успешно использоваться для описания динамики двумерных волн.

2. Тема работы

Гамильтоновы модели для описания двумерных волн, распространяющихся по поверхности трёхмерной идеальной несжимаемой глубокой жидкости в поле тяжести.

3. Состав коллектива

Качулин Дмитрий Игоревич, к.ф.-м.н., с.н.с. лаборатории нелинейных волновых процессов ФФ НГУ до 2020 г., н.с. лаборатории нелинейной фотоники ФФ НГУ с 2021 г.

Дремов Сергей Вячеславович, аспирант НГУ до 2022 г., инженер Лаборатории нелинейных волновых процессов ФФ НГУ до 2022 г. С 2023 г. стажёр-исследователь лаборатории интегрируемых систем и турбулентности центра перспективных исследований Сколковского института науки и технологий.

Дьяченко Александр Иванович, д.ф.-м.н., в.н.с. Института теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН.

4. Информация о грантах

РНФ, Конкурс 2019 года по мероприятию «Проведение исследований научными лабораториями мирового уровня в рамках реализации приоритетов научно-технологического развития Российской Федерации» Президентской программы исследовательских проектов, реализуемых ведущими учеными, в том числе молодыми учеными. Грант № 19-72-30028 «Турбулентность и когерентные структуры в интегрируемых и неинтегрируемых системах». Руководитель – В.Е. Захаров (С 2023 г. – Е.А. Кузнецов)

РФФИ, «Аспиранты», Конкурс на лучшие проекты фундаментальных научных исследований, выполняемые молодыми учеными, обучающимися в аспирантуре. Грант № 20-31-90093 «Когерентные структуры и сейши в слабонелинейных моделях для поверхностных волн», 2020г. Руководитель – Д.И. Качулин.

5. Научное содержание работы

5.1. Постановка задачи

Разработать гамильтоновы модели для описания двумерных волн, распространяющихся по поверхности трёхмерной идеальной несжимаемой глубокой жидкости в поле тяжести. Основная идея заключается в двумеризации компактных форм уравнения Захарова для случая одномерных волн. Реализовать эффективный программный код для численного моделирования полученных моделей с использованием параллельных вычислений. Для проверки моделей на адекватное описание динамики двумерных волн исследовать задачу о почти одномерной стоячей волне в канале с гладкими вертикальными стенками, а также сравнить результаты, полученные в обеих моделях.

5.2. Современное состояние проблемы

Физические явления, связанные с поверхностными волнами на глубокой воде, например опрокидывание волн или образование так называемых волн-убийц, вызывают множество вопросов у исследователей. Невозможно перечислить все работы, посвященные изучению этой области. Зачастую при изучении таких явлений течение жидкости можно предполагать потенциальным. В таком случае динамика волн, распространяющихся на свободной поверхности идеальной несжимаемой жидкости, может быть описана уравнением Лапласа с нелинейными кинематическими и динамическими граничными условиями на поверхности. Решение этих уравнений является нетривиальной задачей, поэтому исследователи используют различные упрощенные модели.

В настоящее время в контексте изучения динамики одномерных волн единственной приближенной моделью, интегрируемой в терминах обратной задачи рассеяния [1], является известное нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) [2]. К сожалению, несмотря на многочисленные достоинства, эта модель содержит существенные ограничения, не позволяющие адекватно описывать указанные физические процессы. К более точным моделям можно отнести различные модификации и обобщения НУШ, уравнение Дыстэ, НОСМ [6] и т.д. Среди таких моделей в рамках данной работы отдельное внимание уделяется уравнению Захарова [3]. Как и НУШ, оно основано на разложении исходного гамильтониана по степеням малого параметра – характерной крутизны волн. Важной особенностью является то, что в случае одномерных волн уравнение Захарова может быть переписано в так называемой компактной форме [4, 5]. Кроме того, существует точная модель для описания динамики одномерных волн, представляющая собой систему нелинейных уравнений, записанных в конформных переменных [7, 8].

Задача значительно усложняется при рассмотрении двумерных волн, распространяющихся на поверхности трехмерной жидкости. Точные уравнения в конформных переменных в такой геометрии уже не могут быть использованы. Тем не менее, некоторое обобщение этих уравнений на случай слабых трехмерных эффектов было рассмотрено в [9], а соответствующее численное моделирование приведено в [10–12]. Одним из очевидных вариантов является использование некоторой двумерной версии НУШ [13, 14], однако ее применимость также весьма ограничена [15]. Более того, двумерное НУШ уже не является интегрируемой моделью. Более точная модификация НУШ, смягчающая ее недостатки, приведена в [16]. Промежуточная модель между НУШ и уравнением Захарова приведена в [17]. Ряд исследований физических явлений и статистических свойств двумерных поверхностных волн с использованием НОСМ можно найти в [18, 19]. Уравнение Захарова может быть использовано и в случае двумерных волн, однако и здесь имеется существенная трудность, которая делает работу с ним достаточно сложной. Исходное уравнение Захарова имеет сложную форму, которую нельзя записать в виде некоторых "компактных" уравнений, как это было сделано в одномерном случае. Тем не менее, это уравнение используется для получения кинетических уравнений типа уравнения Хассельмана [20], что позволяет изучать слабую турбулентность в морях и океанах с ветровой накачкой [21, 22].

В данном проекте предлагаются две приближенные гамильтоновы модели для описания двумерных волн, распространяющихся на поверхности трехмерной идеальной несжимаемой жидкости в поле тяжести. Идея основана на использовании преимуществ одномерного уравнения Захарова. Как уже отмечалось, в этом случае оно может быть записано в простой форме так называемых компактных уравнений. Затем эти уравнения могут быть обобщены на случай двумерных волн. Рассмотрение физических задач, исследование резонансных взаимодействий волн, а также их неустойчивости позволят оценить модели на предмет адекватного описания динамики двумерных волн.

1. Ablowitz, M.J.; Kaup, D.J.; Newell, A.C.; Segur, H. The inverse scattering transform-Fourier analysis for nonlinear problems. *Stud. Appl. Math.* 1974, 53, 249–315.
2. Zakharov, V.E.; Manakov, S. On the complete integrability of a nonlinear Schrödinger equation. *Theor. Math. Phys.* 1974, 19, 551–559.
3. Zakharov, V.E. Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 1968, 9, 190–194.
4. Dyachenko, A.I.; Zakharov, V.E. Compact equation for gravity waves on deep water. *JETP Lett.* 2011, 93, 701–705.
5. Dyachenko, A.; Kachulin, D.; Zakharov, V. Super compact equation for water waves. *J. Fluid Mech.* 2017, 828, 661–679.

6. West, B.J.; Brueckner, K.A.; Janda, R.S.; Milder, D.M.; Milton, R.L. A new numerical method for surface hydrodynamics. *J. Geophys. Res. Ocean.* 1987, 92, 11803–11824.
7. Dyachenko, A.I.; Kuznetsov, E.A.; Spector, M.; Zakharov, V.E. Analytical description of the free surface dynamics of an ideal fluid (canonical formalism and conformal mapping). *Phys. Lett. A* 1996, 221, 73–79.
8. Dyachenko, A.I. On the dynamics of an ideal fluid with a free surface. *Dokl. Math.* 2001, 63, 115–117.
9. Ruban, V.P. Quasiplanar steep water waves. *Phys. Rev. E* 2005, 71, 055303.
10. Ruban, V.P.; Dreher, J. Numerical modeling of quasiplanar giant water waves. *Phys. Rev. E* 2005, 72, 066303.
11. Ruban, V.P. Breathing rogue wave observed in numerical experiment. *Phys. Rev. E* 2006, 74, 036305.
12. Ruban, V.P. Conformal variables in the numerical simulations of long-crested rogue waves. *Eur. Phys. J. Spec. Top.* 2010, 185, 17–33.
13. Davey, A.; Stewartson, K. On three-dimensional packets of surface waves. *Proc. R. Soc. Lond. Math. Phys. Sci.* 1974, 338, 101–110.
14. Hui, W.; Hamilton, J. Exact solutions of a three-dimensional nonlinear Schrödinger equation applied to gravity waves. *J. Fluid Mech.* 1979, 93, 117–133.
15. Yuen, H.C.; Lake, B.M. Nonlinear dynamics of deep-water gravity waves. *Adv. Appl. Mech.* 1982, 22, 67–229.
16. Dysthe, K.B. Note on a modification to the nonlinear Schrödinger equation for application to deep water waves. *Proc. R. Soc. London. Math. Phys. Sci.* 1979, 369, 105–114.
17. Trulsen, K.; Kliakhandler, I.; Dysthe, K.B.; Velarde, M.G. On weakly nonlinear modulation of waves on deep water. *Phys. Fluids* 2000, 12, 2432–2437.
18. Kokorina, A.; Slunyaev, A. Lifetimes of rogue wave events in direct numerical simulations of deep-water irregular sea waves. *Fluids* 2019, 4, 70.
19. Slunyaev, A.; Kokorina, A. Account of occasional wave breaking in numerical simulations of irregular water waves in the focus of the rogue wave problem. *Water Waves* 2020, 2, 243–262.
20. Hasselmann, K. On the non-linear energy transfer in a gravity-wave spectrum Part 1. General theory. *J. Fluid Mech.* 1962, 12, 481–500.
21. Zakharov, V. Analytic theory of a wind-driven sea. *Procedia IUTAM* 2018, 26, 43–58.
22. Zakharov, V.E.; Badulin, S.I.; Geogjaev, V.V.; Pushkarev, A.N. Weak-turbulent theory of wind-driven sea. *Earth Space Sci.* 2019, 6, 540–556.

5.3. Подробное описание работы, включая используемые алгоритмы

Уравнение Захарова в терминах канонической переменной b_k имеет следующий вид:

$$i \frac{\partial b_{\vec{k}}}{\partial t} = \omega_{\vec{k}} b_{\vec{k}} + \int T_{\vec{k}, \vec{k}_1}^{\vec{k}_2, \vec{k}_3} b_{\vec{k}_1}^* b_{\vec{k}_2} b_{\vec{k}_3} \delta_{\vec{k} + \vec{k}_1 - \vec{k}_2 - \vec{k}_3} d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 d\vec{k}_3 \quad (1)$$

Здесь ω_k есть умножение соответствующих гармоник на \sqrt{gk} .

Прямое численное моделирование этого уравнения сопряжено со значительными трудностями, так как на каждом временном шаге требуется вычислять шестимерный (четырёхмерный с учётом дельта-функций) интеграл по $x - y$ компонентам волновых векторов \vec{k}_i . Кроме того, в интеграле дополнительно стоит коэффициент $T_{\vec{k}, \vec{k}_1}^{\vec{k}_2, \vec{k}_3}$, который сам по себе имеет довольно громоздкий вид. Поэтому, решить такую задачу за разумное время, даже с использованием параллельных вычислений, вряд ли возможно.

Тем не менее, в одномерном случае коэффициент $T_{k, k_1}^{k_2, k_3}$ обладает удивительным свойством:

$$T_{k, k_1}^{k_2, k_3} = 0 \quad \text{при} \quad k k_1 k_2 k_3 < 0, \quad (2)$$

Эта особенность позволяет переписать исходное уравнение в более простой форме путём применения канонического преобразования:

$$b_k \rightarrow b_k - i \int \mathbf{B}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1}^{k_2 k_3} b_{k_1}^* b_{k_2} b_{k_3} \delta_{k+k_1-k_2-k_3} dk_1 dk_2 dk_3 \quad (3)$$

$$\mathbf{B}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1}^{k_2 k_3} = i \frac{\tilde{T}_{k,k_1}^{k_2 k_3} - T_{k,k_1}^{k_2 k_3}}{\omega_k + \omega_{k_1} - \omega_{k_2} - \omega_{k_3}}. \quad (4)$$

$$\tilde{T}_{k,k_1}^{k_2, k_3} = \frac{1}{4\pi} (k k_1 + k_2 k_3) D_{k,k_1}^{k_2, k_3} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} D_{k,k_1}^{k_2, k_3} &= \frac{1}{2} (|k| + |k_1| + |k_2| + |k_3|) - \frac{1}{4} (|k + k_1| + |k_2 + k_3|) - \\ &- \frac{1}{4} (|k - k_2| + |k - k_3| + |k_1 - k_2| + |k_1 - k_3|) \end{aligned} \quad (6)$$

После преобразования гамильтониан и уравнение движения записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} H(b, b^*) &= \int \omega_k b_k b_k^* dk + \frac{1}{2} \int \tilde{T}_{k,k_1}^{k_2, k_3} b_{k_1}^* b_{k_2} b_{k_3} \delta_{k+k_1-k_2-k_3} dk dk_1 dk_2 dk_3 \\ i \frac{\partial b_k}{\partial t} &= \omega_k b_k + \int \tilde{T}_{k,k_1}^{k_2, k_3} b_{k_1}^* b_{k_2} b_{k_3} \delta_{k+k_1-k_2-k_3} dk_1 dk_2 dk_3. \end{aligned}$$

Каноническое преобразование позволило оставить в нелинейной части гамильтониана коэффициент $\tilde{T}_{k,k_1}^{k_2, k_3}$, который легко можно записать в x -пространстве, используя следующие соотношения между слагаемыми $\tilde{T}_{k,k_1}^{k_2, k_3}$ и операторами в x -пространстве:

$$\begin{aligned} |k| &\rightarrow \hat{k}c(x) \\ k &\rightarrow -i\partial_x c(x) \\ |k + k_1|, |k_2 + k_3| &= \hat{k}(c^2(x)) \\ |k - k_2|, |k - k_3|, |k_1 - k_2|, |k_1 - k_3| &= \hat{k}(|c(x)|^2) \end{aligned} \quad (7)$$

Уравнение движения в x -пространстве:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial b}{\partial t} &= \hat{\omega}_k b - \frac{1}{4} \left[2b_x b^* \hat{k}(b_x) + b_x b_x \hat{k}(b^*) + \hat{k}(b_x b_x b^*) - \frac{\partial}{\partial x} (b \hat{k}(b^*)) - \frac{\partial}{\partial x} \hat{k}(b b b_x^*) - \right. \\ &- \left. 2 \frac{\partial}{\partial x} (b_x^* \hat{k}(b)) \right] + \frac{1}{4} \left[b^* \hat{k}(b_x b_x) - \frac{\partial}{\partial x} (b_x^* \hat{k}(b b)) \right] + \frac{1}{2} \left[b_x \hat{k}(b_x b^*) - \frac{\partial}{\partial x} (b \hat{k}(b_x^* b)) \right] \end{aligned} \quad (8)$$

Это первая из моделей, которая в дальнейшем будет обобщена на случай двумерных волн.

Очевидно, что это не единственное возможное каноническое преобразование. Можно сделать каноническое преобразование $b_k \rightarrow c_k$ и заменить исходный коэффициент $T_{k,k_1}^{k_2, k_3} \rightarrow \tilde{T}_{k,k_1}^{k_2, k_3}$, что позволит разделить волны на две группы: волны, бегущие влево и вправо ($c(x, t) = c^+(x, t) + c^-(x, t)$).

$$\tilde{T}_{k,k_1}^{k_2, k_3} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{|k||k_1||k_2||k_3|} \mathbf{D}_{k,k_1}^{k_2, k_3} \quad (9)$$

Опуская подробности, можно записать гамильтониан в новой переменной в x -пространстве:

$$\begin{aligned} H &= \int c^{+*} \hat{V} c^+ dx + \frac{1}{2} \int \left[\frac{i}{4} (c^{+2} \frac{\partial}{\partial x} c^{+*2} - c^{+*2} \frac{\partial}{\partial x} c^{+2}) - |c^+|^2 \hat{k} |c^+|^2 \right] dx + \\ &+ \int c^{-*} \hat{V} c^- dx + \frac{1}{2} \int \left[\frac{i}{4} (c^{-*2} \frac{\partial}{\partial x} c^{-2} - c^{-2} \frac{\partial}{\partial x} c^{-*2}) - |c^-|^2 \hat{k} |c^-|^2 \right] dx + \\ &+ \int \left[|c^+|^2 \hat{k} |c^-|^2 + c^{+*} c^{-*} \hat{k} (c^+ c^-) + i (c^{+*} c^-) \frac{\partial}{\partial x} (c^+ c^{-*}) \right] dx \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь $\hat{V} = \hat{\omega}/\hat{k}$, \hat{k} и $\hat{\omega}$ соответствуют умножению на $|k|$ и $\sqrt{g|k|}$ в Фурье-пространстве, ∂_x^+ , ∂_x^- соответствуют умножению на $ik\theta_k$ и $ik\theta_{-k}$, где θ_k есть функция Хевисайда. Взяв вариационные

производные можно получить систему суперкомпактных уравнений, описывающую динамику одномерных встречных волн:

$$\begin{aligned}\frac{\partial c^+}{\partial t} + i\hat{\omega}c^+ &= \partial_x^+ \left[i(|c^+|^2 - |c^-|^2)c_x^+ + c^+\hat{k}(|c^+|^2 - |c^-|^2) - ic^+c^-c_x^{-*} - c^{-*}\hat{k}(c^+c^-) \right] \\ \frac{\partial c^-}{\partial t} + i\hat{\omega}c^- &= \partial_x^- \left[i(|c^-|^2 - |c^+|^2)c_x^- - c^-\hat{k}(|c^-|^2 - |c^+|^2) - ic^-c^+c_x^{+*} + c^{+*}\hat{k}(c^+c^-) \right]\end{aligned}$$

Это вторая модель, которая в дальнейшем будет также обобщена на случай двумерных волн.

Проведём двумеризацию этих моделей на случай двумерных волн. Для этого необходимо переопределить все слагаемые и операторы в соответствующих уравнениях:

$$\begin{aligned}\hat{k} &\rightarrow |\vec{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \\ \hat{\omega} &\rightarrow \sqrt{g|\vec{k}|} \\ \frac{\partial}{\partial x} &\rightarrow i|\vec{k}|\text{sign}(k_x) \\ \partial_x^+ &\rightarrow i\hat{k}\theta_{k_x} = i\hat{k}^+ \\ \partial_x^- &\rightarrow -i\hat{k}\theta_{-k_x} = -i\hat{k}^- \\ b &= b(x, y, t), \quad c^+ = c^+(x, y, t), \quad c^- = c^-(x, y, t)\end{aligned}$$

В терминах переменной b уравнение движения для случай двумерных волн примет следующий вид:

$$\begin{aligned}i\frac{\partial b}{\partial t} &= \hat{\omega}_{\vec{k}}b - \frac{1}{4} \left[2(\nabla b) \cdot \hat{k}(\nabla b)b^* + (\nabla b) \cdot (\nabla b)\hat{k}(b^*) + \hat{k}((\nabla b) \cdot (\nabla b)b^*) - \right. \\ &\quad \left. - \nabla \cdot (bb\hat{k}(\nabla b^*)) - \nabla \cdot (\hat{k}(bb(\nabla b^*))) - 2\nabla \cdot ((\nabla b^*)b\hat{k}(b)) \right] + \\ &\quad + \frac{1}{4} \left[b^*\hat{k}((\nabla b) \cdot (\nabla b)) - \nabla \cdot ((\nabla b^*)\hat{k}(bb)) \right] + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[(\nabla b) \cdot \hat{k}((\nabla b)b^*) - \nabla \cdot (b\hat{k}((\nabla b^*)b)) \right]\end{aligned}\quad (11)$$

Система суперкомпактных уравнений в свою очередь переходит в систему двумерных уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{\partial c^+}{\partial t} &= -i\hat{\omega}c^+ - i\hat{k}^+ \left[\frac{1}{2}c^{+*}\hat{k}(c^{+2}) - c^+\hat{k}(|c^+|^2 - |c^-|^2) - c^-\hat{k}(c^+c^{-*}) + c^{-*}\hat{k}(c^+c^-) \right] \\ \frac{\partial c^-}{\partial t} &= -i\hat{\omega}c^- + i\hat{k}^- \left[\frac{1}{2}c^{-*}\hat{k}(c^{-2}) - c^-\hat{k}(|c^-|^2 - |c^+|^2) - c^+\hat{k}(c^+c^{-*}) + c^{+*}\hat{k}(c^+c^-) \right]\end{aligned}\quad (12)$$

Обе модели в дальнейшем используются для численного моделирования.

Для проверки адекватности предложенных моделей при описании динамики двумерных глубоководных волн в рамках численного моделирования рассматривается физическая задача о стоячих волнах в канале с гладкими вертикальными стенками. Для этого рассматривается периодическая область в водном канале с размерами $L_x \times L_y = 300 \text{ м.} \times 1000 \text{ м.}$ В качестве начального условия рассматривалась возмущенная одномерная стоячая волна с характерной длиной волны $\lambda_0 = 20 \text{ м.}$ Средняя крутизна $\mu = |\vec{\nabla}\eta| \approx 0.26$. Возмущение проводилось в области вокруг основной гармоники $\vec{k}_0 = (k_x = \frac{\pi}{10}; k_y = 0)$. Для предотвращения опрокидывания волны использовалось затухание, сосредоточенное в области коротких волн.

При рассмотрении возмущенных стоячих волн в водном канале с гладкими вертикальными стенками необходимо, чтобы производная была равна нулю у стенок. Это означает, что разложение η_k должно содержать только косинусы:

$$\left. \frac{\partial \eta}{\partial x} \right|_{x=0, L} = 0; \quad \eta_k = \sum_k a_k \cos(kx) \quad (13)$$

В терминах b и c^+, c^- поверхность может быть восстановлена следующими каноническими преобразованиями:

$$\eta_k = \frac{|\vec{k}|^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2g^{\frac{1}{4}}}} \left[b_{\vec{k}} + b_{\vec{k}}^* \right]; \quad \eta_k = \frac{|\vec{k}|^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{2g^{\frac{1}{4}}}} \left[c_{\vec{k}}^+ + c_{\vec{k}}^- + c_{\vec{k}}^{+*} + c_{\vec{k}}^{-*} \right] \quad (14)$$

В результате получаются следующие условия для переменных:

$$b(-k_x, k_y) = b(k_x, k_y); \quad c^-(-k_x, k_y) = c^+(k_x, k_y) \quad (15)$$

Таким образом, условие на переменную b_k сохраняется на каждом временном шаге при расчете в модели в переменных b_k . В случае переменных c^+, c^- можно использовать только одно уравнение с условием для переменных c^+, c^- :

$$\frac{\partial c^+}{\partial t} = -i\hat{\omega}c^+ - i\hat{k}^+ \left[\frac{1}{2}c^{+*}\hat{k}(c^{+2}) - c^+\hat{k}(|c^+|^2 - |c^-|^2) - c^-\hat{k}(c^+c^{-*}) + c^{-*}\hat{k}(c^+c^-) \right]$$

Адекватность моделей подтверждается использованием метода замороженных коэффициентов. Можно легко показать, что уравнения не обладают неустойчивостью на малых масштабах, что важно при численном моделировании из-за ошибок округления. Обе модели содержат нелокальные члены с оператором \hat{k} . Напомним, что этот оператор легко вычисляется только в Фурье-пространстве как умножение на $|\vec{k}|$. Поэтому для вычисления правой части уравнений целесообразно использовать псевдоспектральные методы Фурье. Для интегрирования по времени используется стандартный метод Рунга-Кутты четвертого порядка. Корректность вычислений дополнительно проверяется сохранением интегралов движения. Для проведения процедуры быстрого преобразования Фурье использовалась библиотека FFTW3. Перемножение сеточных функций производилось в x -пространстве, а для вычисления производных и нелокальных членов использовались прямое и обратное преобразования Фурье. Для распараллеливания численного алгоритма использовались средства OpenMP, а распараллеливание двумерных преобразований Фурье осуществлялось с помощью библиотеки fftw3-threads.

5.4. Полученные результаты

На рисунке 1 представлены двумерные спектры $|\eta_{k_x, k_y}|^2$ в различные моменты времени. Спектр симметричен относительно вертикальной линии при $k_x = 0$, поскольку рассматриваются стоячие волны. Поэтому часть спектра с отрицательным значением k_x не показана. Как уже отмечалось, первоначально (панель а) это одномерная стоячая волна с $k_{x0} = \frac{\pi}{10} \text{ м}^{-1}$, $k_{y0} = 0$ и малым возмущением вокруг нее. В процессе эволюции во времени спектр расширяется (панель б) и через длительное время становится практически изотропным (образование кольца) (панель с).

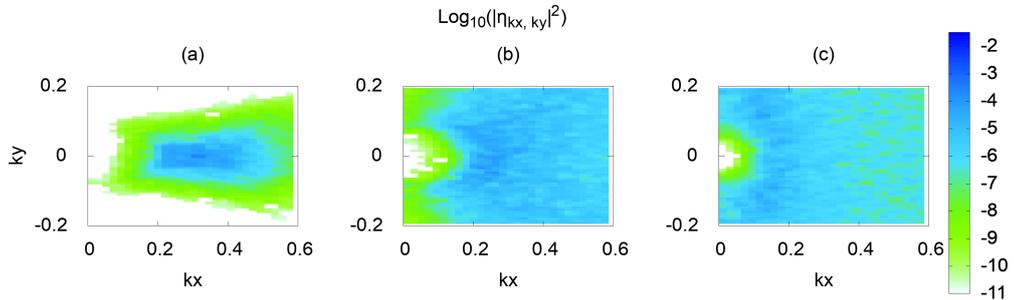


Рис. 1: Эволюция спектра $|\eta(k_x, k_y, t)|^2$ во времени в логарифмическом масштабе. Цветом показана амплитуда гармоники в квадрате. Панель (а) соответствует почти начальной поверхности в момент времени $t \approx 2$ мин. Панель (б) соответствует поверхности в момент времени $t \approx 1$ ч., а панель (с) - поверхности в момент времени $t \approx 96$ ч.

На рисунке показаны одномерные спектры $|\eta_{k_x}|^2$ при $k_y = 0$ (панель а) и зависимость полной энергии от времени (панель б). Видно, что со временем спектр смещается в область малых волновых чисел, т.е. волны в канале становятся длиннее вдоль оси x . В совокупности с двумерным спектром можно сделать вывод, что волны становятся немного длиннее в направлении оси x и значительно

длиннее в направлении оси y . Полная энергия системы постепенно уменьшается за счет затухания, сосредоточенного в области коротких волн.

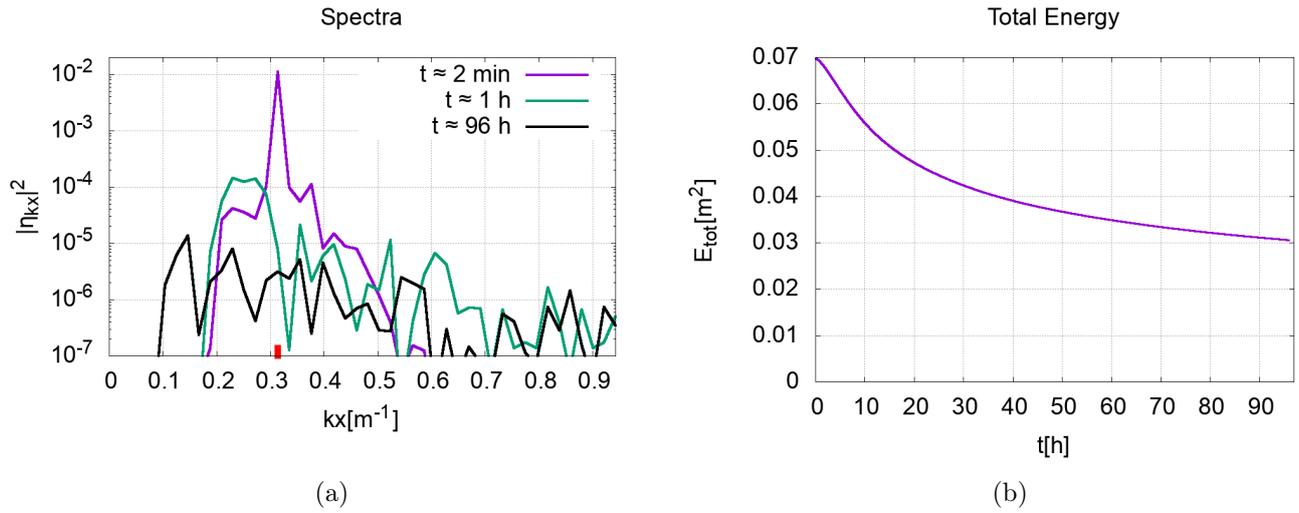


Рис. 2: На панели (a) показана эволюция одномерного спектра $|\eta(k_x, k_y = 0, t)|^2$ во времени в логарифмическом масштабе. Маленькая красная линия указывает на начальное характерное волновое число k_{x0} . Фиолетовая кривая соответствует почти начальному спектру в момент времени $t \approx 2$ мин., зеленая - спектру в момент времени $t \approx 1$ ч., а черная - спектру в момент времени $t \approx 96$ ч. На панели (b) показана зависимость полной энергии от времени.

Временная эволюция поверхности представлена на рисунке 3. Изображения симметричны вокруг центральной вертикальной линии на расстоянии $x = 150$ м. Вначале волны выглядят квази-одномерными. Затем волны со временем начинают изгибаться. Наконец, через длительное время изотропизация спектра приводит к тому, что появляются волны, направленные во все стороны.

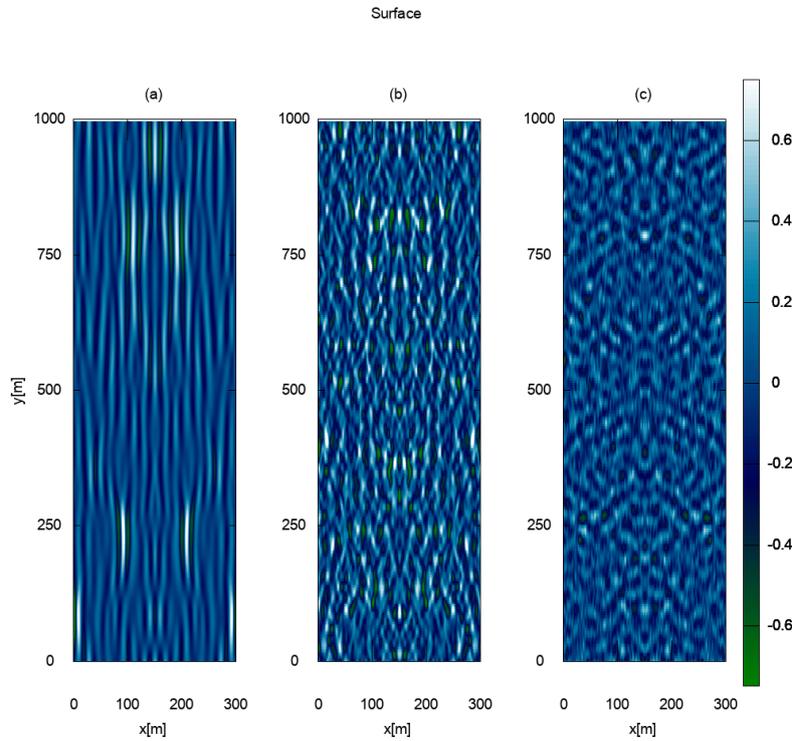


Рис. 3: Эволюция поверхности $\eta(x, y, t)$ во времени. Цветом показана амплитуда волн в метрах. Панель (a) соответствует начальной поверхности в момент времени $t \approx 2$ мин. Панель (b) соответствует поверхности в момент времени $t \approx 1$ ч., а панель (c) - поверхности в момент времени $t \approx 96$ ч.

Для получения дополнительной информации можно посмотреть несколько фильмов:

Фильм с динамикой одномерного спектра можно посмотреть здесь: <http://kachulin.itp.ac.ru/mdpi-2022-films/spectrum-1d.avi> (25.04.2022)

Фильм с динамикой двумерного спектра можно посмотреть здесь: <http://kachulin.itp.ac.ru/mdpi-2022-films/spectrum-2d-zoom.avi> (25.04.2022)

Далее представлены короткие фильмы с динамикой поверхности:

В начальный момент времени: <http://kachulin.itp.ac.ru/mdpi-2022-films/surface-0s.avi> (25.04.2022)

В конечный момент времени: <http://kachulin.itp.ac.ru/mdpi-2022-films/surface-96h.avi> (25.04.2022)

Модель в переменных c^+ и c^- несколько отличается от модели в переменных b . Тем не менее, результаты оказываются очень похожими и здесь. На рисунке 4 также виден процесс изотропизации спектра со временем. Несмотря на некоторые различия в числах, в целом динамика остается той же.

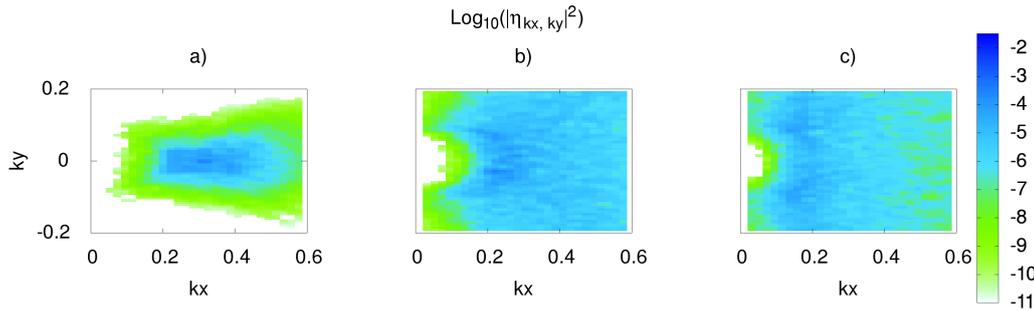


Рис. 4: Эволюция спектра $|\eta(k_x, k_y, t)|^2$ во времени в логарифмическом масштабе. Цветом показана амплитуда гармоники в квадрате. Панель (a) соответствует начальной поверхности в момент времени $t \approx 2$ мин. Панель (b) соответствует поверхности в момент времени $t \approx 1$ ч., а панель (c) - поверхности в момент времени $t \approx 26$ ч.

То же самое можно сказать и об одномерном спектре, представленном на рисунке 5 (панель a). Поскольку уравнения движения в переменных c^+ и c^- разные, то и функция затухания тоже разная. Это приводит к изменению зависимости энергии. Она уменьшилась в большей степени за более короткое время расчета (панель b), но это вновь не повлияло на общую динамику.

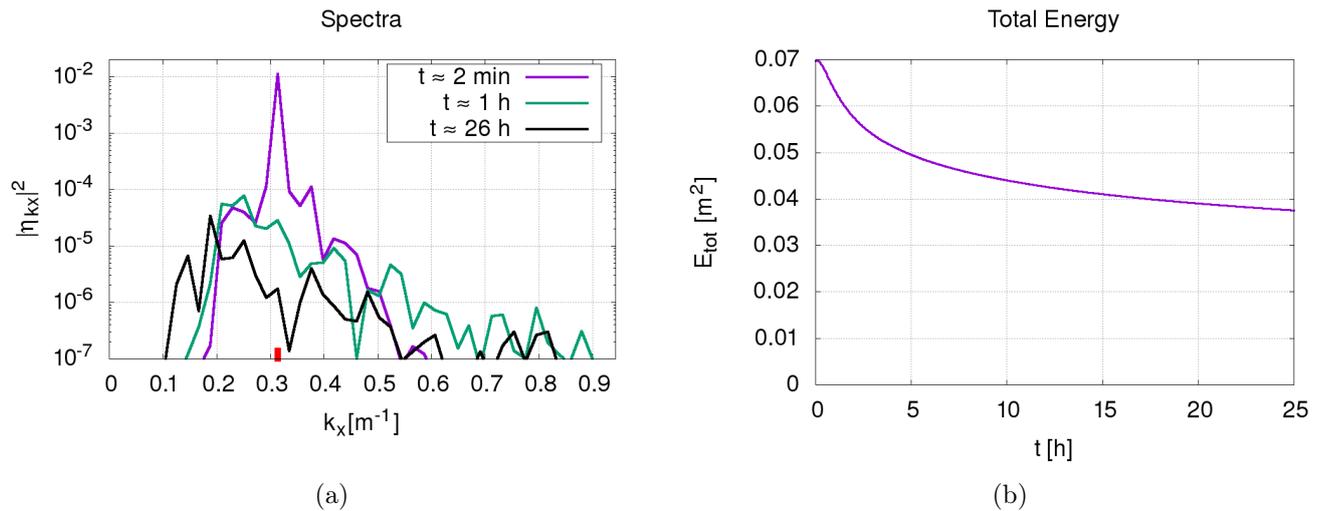


Рис. 5: На панели (a) показана эволюция одномерного спектра $|\eta(k_x, k_y = 0, t)|^2$ во времени в логарифмическом масштабе. Маленькая красная линия указывает на начальное характерное волновое число k_0 . Фиолетовая кривая соответствует начальному спектру в момент времени $t \approx 2$ мин, зеленая - спектру в момент времени $t \approx 1$ ч., а черная - спектру в момент времени $t \approx 26$ ч. На панели (b) показана зависимость полной энергии от времени.

На рисунке 6 представлена эволюция поверхности во времени. Сравнивая панели (a) и (b) с теми

же панелями в рисунке 3, можно заметить, что они практически неотличимы друг от друга. Поскольку изменений в динамике не произошло, итоговое время вычислений в этой модели оказалось меньше.

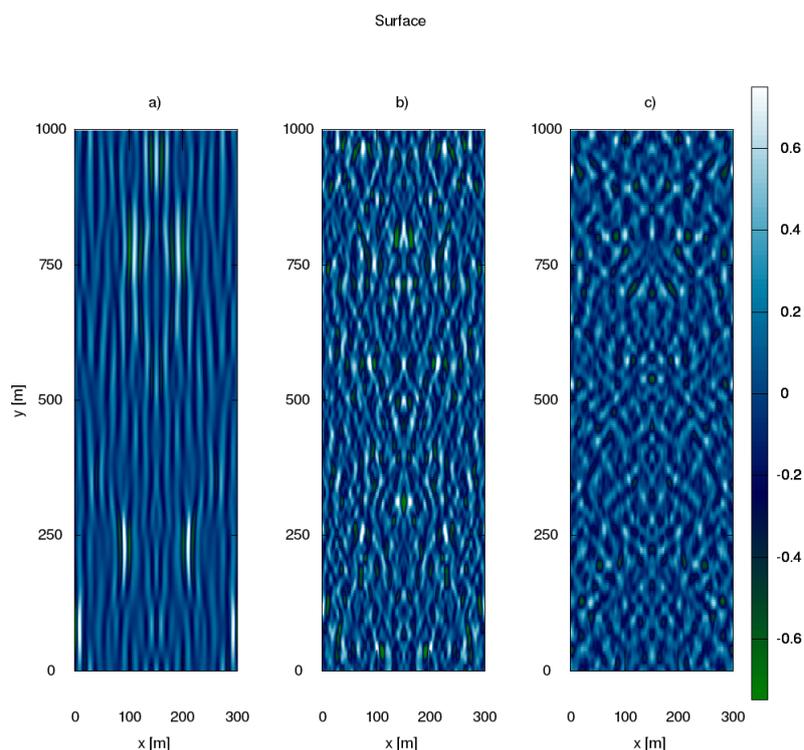


Рис. 6: Эволюция поверхности $\eta(x, y, t)$ во времени. Цветом показана амплитуда волн в метрах. Панель (a) соответствует почти начальной поверхности в момент времени $t \approx 2$ мин. Панель (b) соответствует поверхности в момент времени $t \approx 1$ ч., а панель (c) - поверхности в момент времени $t \approx 26$ ч.

6. Эффект от использования кластера в достижении целей работы

Исследование динамики двумерных волн, распространяющихся по поверхности трёхмерной жидкости, представляет серьёзные трудности как с теоретической, так и с вычислительной точки зрения. Эффективное численное моделирование задач в рамках используемых уравнений возможно только с использованием параллельных вычислений на нескольких ядрах. Даже с использованием распараллеленных алгоритмов расчёт одной задачи занимает десятки суток, в связи с чем совершенно очевидно, что без использования вычислительных ресурсов кластера выполнение данных задач за разумное время было бы невозможным.

7. Перечень публикаций, содержащих результаты работы

1. Dremov, S.; Kachulin, D.; Dyachenko, A. Two Models for 2D Deep Water Waves. *Fluids* 2022, 7, 204.

<https://doi.org/10.3390/fluids7060204>

doi: 10.3390/fluids7060204

(WoS:, Scopus: РИНЦ)