Отчет о проделанной работе с использованием оборудования ИВЦ НГУ

1. Аннотация

В работах [1, 2] авторами получено компактное уравнение Захарова. Это уравнение описывает динамику одномерных поверхностных волн на глубокой воде, распространяющихся в одном направлении. В предположнии слабонеоднородных в поперечном направлении волн, это уравнение обобщается для описания эволюции квазидвумерных поверхностных волн. В одномерном копактном уравнении Захарова численно методом Петвиашвили найдены солитонные решения – бризеры, определяемые двумя параметрами – групповой скоростью и нелинейной частотой. Численно изучены столкновения двух бризеров, распространяющихся в одном направлении с разными скоростями. Показано, что столкновения бризеров не являются упругими – наблюдается излучение некогерентных волн. Вычислен шестиволновой коэффициент, возникающий во втором порядке терии возмущений. Показано, что вычисленный шестиволновой коэффициент не исчезает на резонансной поверхности, соответствующей резонансу $3 \leftrightarrow 3$. Таким образом, численно и аналитически доказана неинтегрируемость компактного уравнения Захарова. В рамках уравнения Захарова, обобщенного для описания квазидвумерных поверхностных волн, решена задача модуляционной неустойчивости монохроматической волны, являющейся простейшим точным решением уравнения; определены области неустойчивых возмущений; вычислены инкременты. С помощью разработанного алгоритма решения двумерного уравнения Захарова показано формирование двумерных волн экстремальной амплитуды (волн-убийц) в результате развития модуляционной неустойчивости плоских волн.

2. Тема работы

Исследование волн экстремальной амплитуды на поверхности глубокой воды в рамках уравнения Захарова.

3. Состав коллектива

Качулин Дмитрий Игоревич, аспирант НГУ, м.н.с. Лаборатории нелинейных волновых процесов НИЧ НГУ, ассистент кафедры высшей метематики ФФ НГУ (исполнитель, логин dikachulin)

Дьяченко Александр Иванович, д.ф.-м.н., с.н.с. Института теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, с.н.с. Лаборатории нелинейных волновых процессов НИЧ НГУ (руководитель, доступ к кластеру не требуется)

Захаров Владимир Евгеньевич, д.ф.-м.н., профессор, академик РАН, заведующий Лабораторией нелинейных волновых процессов НИЧ НГУ, г.н.с. Института теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, заведующий сектором математической физики Физического института им. П.Н.Лебедева РАН (руководитель, доступ к кластеру не требуется)

4. Информация о гранте

Грант Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских вузах. Грант № 11.G34.31.0035, руководитель – В.Е. Захаров.

РНФ, Конкурс 2014 г. на получение грантов по приоритетному направлению деятельности РНФ «Проведение фундаментальных научных исследований и поисковых научных исследований коллективами существующих научных лабораторий (кафедр)». Грант № 14-22-00174. Руководитель – В.Е. Захаров.

5. Научное содержание работы

5.1. Постановка задачи

Проект был направлен на исследование динамики одномерных и двумерных поверхностных волн на глубокой воде в рамках одномерного компактного уравнения Захарова и "квазидвумерного"уравнения

Захарова. Целями работы являлись: исследование одномерного уравнения Захарона на интегрируемость (поиск солитонных решений–бризеров, численное исследование парных столкновений бризеров, аналитическое изучение интегрируемости с применением теории рассеяния); решение задачи о модуляционной неустойчивости плоских волн в рамках "квазидвумерного"уравнения Захарова; изучение динамики поверхностных волн, слабонеоднородных в поперечном направлении и и формирования волн экстремальной амплитуды.

5.2. Современное состояние проблемы

Океанские волны экстремальной амплитуды или волны-убийцы являются существенно нелинейными объектами. Это либо одиночные импульсы, либо группы волн, как правило, ассиметричные и обладающие значительной крутизной. До распада их крутизна выше, чем предельная крутизна волны Стокса, а их амплитуда превышает более чем в три-четыре раза среднюю амплитуду соседних волн. При этом характерное время жизни таких волн очень мало – порядка десяти периодов. Механизмы формирования волн-убийц рассмотрены в работе [3]. Появление волн-убийц естественно связывают с модуляционной неустойчивостью волн Стокса.

Изучение поверхностных волн в рамках полной модели – нелинейной системе гидродинамических уравнений для потенциальных течений идеальной несжимаемой жидкости в поле тяжести со свободной поверхностью представляет собой достаточно сложную задачу. Поэтому часто ограничиваются приближенными моделями для описания гравитационных волн на глубокой воде. Так, например, нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) может быть использовано для моделирования модулированных слабонелинейных поверхностных волн на глубокой воде. НУШ является первым элементом в целой иерархии уравнений на огибающую поверхностных гравитационных волн. Это уравнение выведено в предположинии малой крутизны волн и узкой спектральшой ширины волновых пакетов, т.е. в предположении слабых модуляций плоских волн. Следующим элементом в этой иерархии является уравнение Дыстэ, имеющее более широкий диапазон применимости. Исследование динамики поверхностных волн и формирование волн экстремальной амплитуды в рамках нелинейного уравнения Шредингера и уравнения Дыстэ можно найти в работах [4], [5].

Другой подход в описании аномальных волн состоит в применение более полных модельных уравнений, учитывающих точную линейную дисперсию и нелинейность, по сравнению с уравнениями на огибающую. Это так называемые уравнения Захарова. В работах [1, 2] авторы применили гамильтонов формализм и теорию канонических преобразований для задачи динамики волн на поверхности глубокой жидкости в поле тяжести. В предположение об однонаправленности распространения волн удалось найти вид канонического преобразования от естественных (физических) переменным – профиля свободной поверхности и потенциала скорости на ней к комплексным нормальным переменным, при котором все нерезонансные слагаемые третьего и чествертого порядков в разложении гамильтониана по крутизне удаляются, а единственное резонансное слагаемое четвертого порядка существенно упрощается. Это позволяет записать гамильтониан и соответствующее уравнение движение в компактном воде в x – пространстве. Это новое уравнение пригодно как для аналитических исследований, так и для численного моделирования динамики одномерных поверхностных волн на глубокой воде.

Также данный подход представляется перспективным в плане исследования интегрируемости уравнений гидродинамики со свободной поверхностью на глубокой воде. Известно, что теория слабо нелинейных волн на мелкой воде является своего рода “инкубатором” многих полностью интегрируемых моделей. Среди них известные уравнения Кортевега-де-Фриза и Кадомцева-Петвиашвили, а также уравнения Буссинеска, системы Каупа, системы Дэви-Стьюартсона. Подробное изучение этих интегрируемых систем имеет не только теоретическое, но и практическое значение. Так, представление решения уравнения Кадомцева-Петвиашвили в виде Θ-функций Якоби является очень эффективным и экономичным способом анализа экспериментальных данных для длинных волн в прибрежной зоне. В случае же глубокой воды, до сих пор известна только одна интегрируемая модель – нелинейное уравнение Шредингера, которая из-за отмеченной выше ограниченности области применения, не может быть так же успешно применена в реальном случае.

Полученное компактное уравнение Захарова может быть обобщено на случай "квазитрехмерной"жидкости, то есть для описания квазидвумерных поверхностных волн слабонеоднородных в поперечном направлении. Такое обобщение уравнения возможно в предположении, аналогичном условию, используемому при выводе уравнения Кадомцева-Петвиашвили из уравнения Кортевега-де Вриза.

1. A.I. Dyachenko and V.E. Zakharov, JETP Letters, 2011, 93(12), 701.
2. A.I. Dyachenko and V.E. Zakharov, European Journal of Mechanics - B/Fluids, 2012, 32, 17.
3. C. Kharif and E. Pelinovsky, Eur. J. Mech. B/Fluids 22,603 (2003).
4. M. I. Ablovitz et al., Phys. Rev. Lett. 2000, 84, 887.
5. M. Onorato et al., Phys. Fluids 2002, 14, L25.

5.3. Подробное описание работы, включая используемые алгоритмы

Одномерное компактное уравнение Захарова x – пространстве имеет вид:

$$i\dot{b} = \hat{\omega}_k b + \frac{i}{4}\hat{P^+}\left[b^*\frac{\partial}{\partial x}(b'^2) - \frac{\partial}{\partial x}(b^{*\prime}\frac{\partial}{\partial x}b^2)\right] - \frac{1}{2}\hat{P^+}\left[b\cdot\hat{k}(|b'|^2) - \frac{\partial}{\partial x}(b'\hat{k}(|b|^2))\right]. \tag{1}$$

Здесь $\dot{b}$ означает производную функции $b(x,t)$ по временной переменной t, а b' – производную по пространственной переменной x. $\hat{\omega}_k$ – оператор умножения в Фурье пространстве на $\sqrt{g|k|}$ (дисперсионное соотношение для волн на глубокой воде), g – ускорение свободного падения, k – волновое число. $\hat{P^+}$ – оператор проектирования в верхнюю полуплоскость, появляющийся в уравнении вследствие того, что рассматриваются волны, распространяющиеся в одном направлении (в спектре решения $b(k,t)$ присутствуют только положительные k), оператор $\hat{k}$ – умножение на $|k|$ в Фурье пространстве.

Были найдены солитонные решения уравнения 1 в виде бризеров:

$$b(x,t) = B(x - Vt)e^{ik_0x - i\omega_0 t} \tag{2}$$

В Фурье пространстве эти решения имеют вид:

$$b_k(t) = \phi_k e^{-i(\Omega - Vk)t} \tag{3}$$

Здесь Ω – нелинейная частота, близкая к $\frac{\omega_{k_0}}{2}$, а V – групповая скорость. Такие решения находились численно, с помощью итерационного метода Петвиашвили.

$$(\Omega + Vk - \omega_k)\phi_k^{n+1} = M^n\int \tilde{T}_{kk_1}^{k_2k_3}\phi_{k_1}^{*\ n}\phi_{k_2}^n\phi_{k_3}^n\delta_{k+k_1-k_2-k_3}dk_1dk_2dk_3,$$

Коэффициент Петвиашвили M^n имел следующий вид:

$$M^n = \left[\frac{<\phi_k^n(\Omega + Vk - \omega_k)\phi_k^n>}{<\phi_k^n\int\tilde{T}_{kk_1}^{k_2k_3}\phi_{k_1}^{*n}\phi_{k_2}^n\phi_{k_3}^n\delta_{k+k_1-k_2-k_3}dk_1dk_2dk_3>}\right]^{\frac{3}{2}}.$$

Здесь n – номер итерации, а $\tilde{T}_{kk_1}^{k_2k_3}$ – коэффициент четырехволновых взаимодействий.

Был разработан алгорим решения уравнения (1) на основе псевдоспектрального метода Фурье. С помощью разработанного кода были проведены численные эксперименты по изучению распространений и парных столкновений бризеров, распространяющихся в одном направлении.

Уравнение (1) было обощено для описания эволюции квазидвумерных поверхностных волн в духе Кадомцева-Петвиашвили для уравнения Кортевега-де-Фриза:

$$i\frac{\partial b}{\partial t} = \hat{\omega}_{k_x,k_y}b + \frac{i}{4}\hat{P}_x^+\left[b^*\frac{\partial}{\partial x}(b_x'^{\,2}) - \frac{\partial}{\partial x}(b_x^{*\prime}\frac{\partial}{\partial x}b^2)\right] - \frac{1}{2}\hat{P}_x^+\left[b\cdot\hat{k}(|b_x'|^2) - \frac{\partial}{\partial x}(b_x'\hat{k}(|b|^2))\right]. \tag{4}$$

В данном уравнении $\dot{b}$ означает производную функции $b(x,y,t)$ по временной переменной t, а b_x' - производную по пространственной переменной x. $\hat{\omega}_{k_x,k_y}$ - оператор умножения в Фурье пространстве на $\sqrt{g|\vec{k}|}$, где $|\vec{k}|$ – модуль вектора $\vec{k} = (k_x,k_y)$. Действие оператора проектирования $\hat{P_x^+}$ в Фурье пространстве есть умножение на $\theta(k)$ – функцию Хевисайда, оператор $\hat{k}_x$ – умножение на $|k_x|$ в Фурье пространстве.

Для численного решения уравнения (4) был разработан алгоритм на основе псевдоспектрального метода Фурье с интегрированием по времени методом Рунге-Кутта четвертого порядко точности. Для быстрого преобразования Фурье по пространственным переменным использовалась библиотека FFTW (Fastest Fourier Transform in the West). Вследствие того, что в нелинейной части уравнения присутствуют пространственные производные только по одному направлению (по x), нелинейные слагаемые в правой части можно вычислять независимо для различных значений пространственной переменной y используя одномерное преобразование Фурье. Часть кода, соответствующая данному вычислению была распараллелена с помощью инструментов MPI и OpenMP. После этого, для полного вычисления правой части (в частности, для вычисления слагаемого $\hat{\omega}_{k_x,k_y} b$)использовалось двумерное преобразование Фурье из библиотеки FFTW.

$$
i\frac{\partial b(x,y)}{\partial t} = \hat{\omega} b(x,y) + \begin{array}{|c|}
\hline
\frac{i}{4}\hat{P}^{+}_{x}\left[b^*(x,y_1)\frac{\partial}{\partial x}(b'_x(x,y_1)^2) - \dots\right. \\
\hline
\frac{i}{4}\hat{P}^{+}_{x}\left[b^*(x,y_2)\frac{\partial}{\partial x}(b'_x(x,y_2)^2) - \dots\right. \\
\hline
\frac{i}{4}\hat{P}^{+}_{x}\left[b^*(x,y_3)\frac{\partial}{\partial x}(b'_x(x,y_3)^2) - \dots\right. \\
\hline
\dots \\
\hline
\frac{i}{4}\hat{P}^{+}_{x}\left[b^*(x,y_N)\frac{\partial}{\partial x}(b'_x(x,y_N)^2) - \dots\right. \\
\hline
\end{array}
\begin{array}{c} \uparrow \\ \mathrm{y} \\ \downarrow \end{array}
$$

5.4. Полученные результаты

Аналитически была исследована интегрируемость компактного уравнения Захарова. Был вычислен шестиволновой коэффициент, возникающий во втором порядке терии возмущений. Оказалось, что шестиволновой коэффициент, соответствующей процессу взаимодействия $3 \leftrightarrow 3$, не исчезает на резонансной поверхности. Таким образом, компактное уравнение Захарова является неинтегрируемым. Кроме того, были проведены численные эксперименты по изучению парных столкновений бризеров. Оказалось, что бризеры сталкиваются почти упруго – только после большого числа столкновений наблюдается излучение некогерентных волн (см. Рисунок 1). Это означает, что хотя компактное уравнение Захарова не является в строгом смысле интегрируемым, но рассмотриваемая модель является "почти интегрируемой". Отправной точкой для построения модели – компактного уравнения Захарова – являлась разложение исходного гамильтониана для волн на воде до первого нерезонансного слагаемого (четырехволнового, соответсвующего процессу $2 \leftrightarrow 2$) и не влкючала в себя шестиволновые члены. Поэтому, вопрос о возможной интегрируемости нелинейных моделей, учитывающих следующие порядки в разложении точного гамильтониана, остается открытым: в следующих порядках разложения имеются слагаемые шестого порядка, которые вносят свой вклад в полный шестиволновой коэффициент.

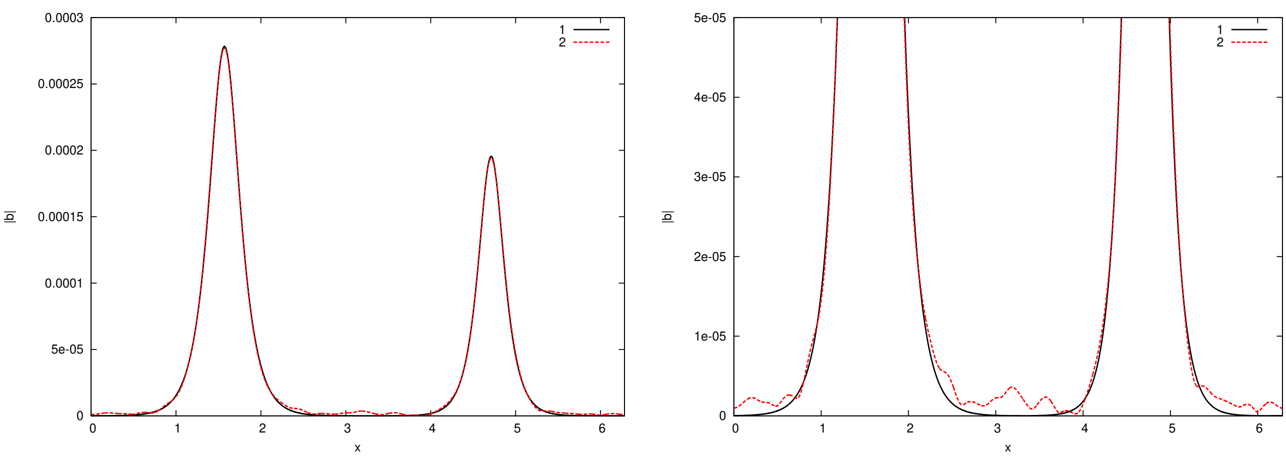

Рис. 1: Профили огибающих двух бризеров ($|b(x)|$) в начальный момент времени (черная сплошная кривая) и после 100 парных столкновений (красная пунктирная кривая).

В обобщенном для описания квазидвумерных поверхностных волн компактном уравнении Захарова найдено простейшее решение – монохроматическая волна произвольной амплитуды. Проведен анализ линейной устойчивости такого решения относительно произвольных малых возмущений. Определены области неустойчивых волновых векторов возмущений, вычислены инкременты (см. Рисунок 2).

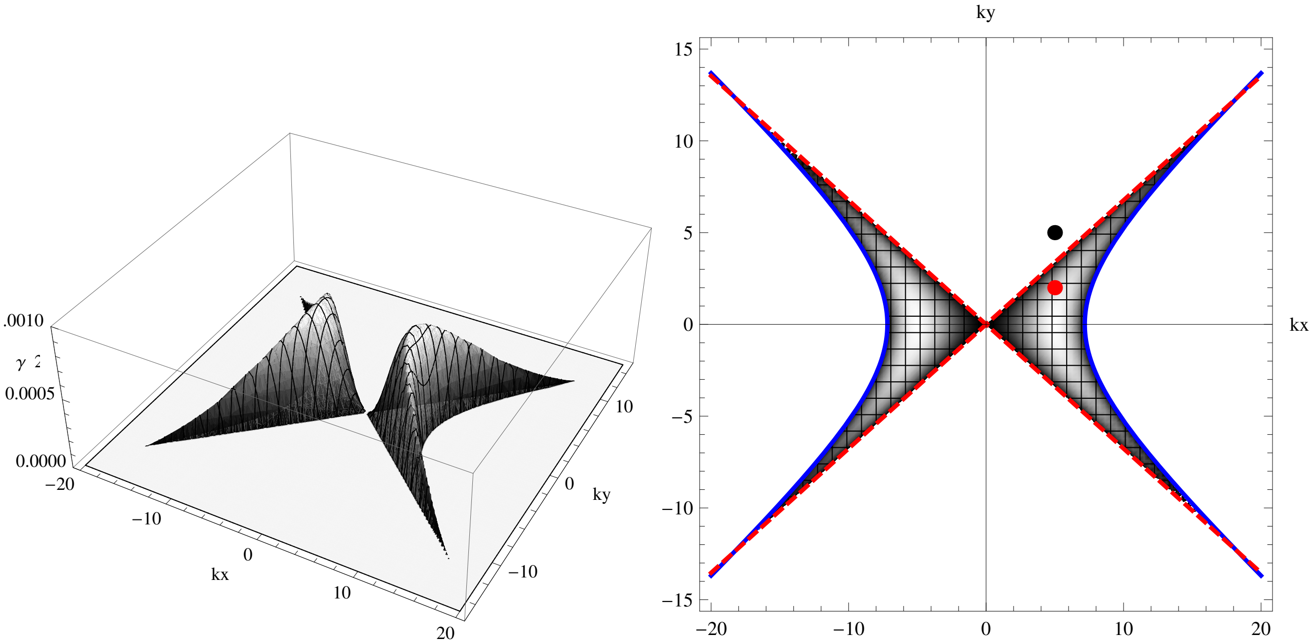

Рис. 2: Инкремент модуляционной неустойчивости монохроматической волны в плоскости (k_x, k_y) – компонент волнового вектора возмущения.

С помощью распараллеленной версии программы решения квазидвумерного уравнения Захарова на вычислительном комплексе ИВЦ НГУ были проведены численные эксперименты с формированием волн экстремальной амплитуды в результате развития модуляционной неустойчивости плоских однонаправленных волн (см. Рисунок 3).

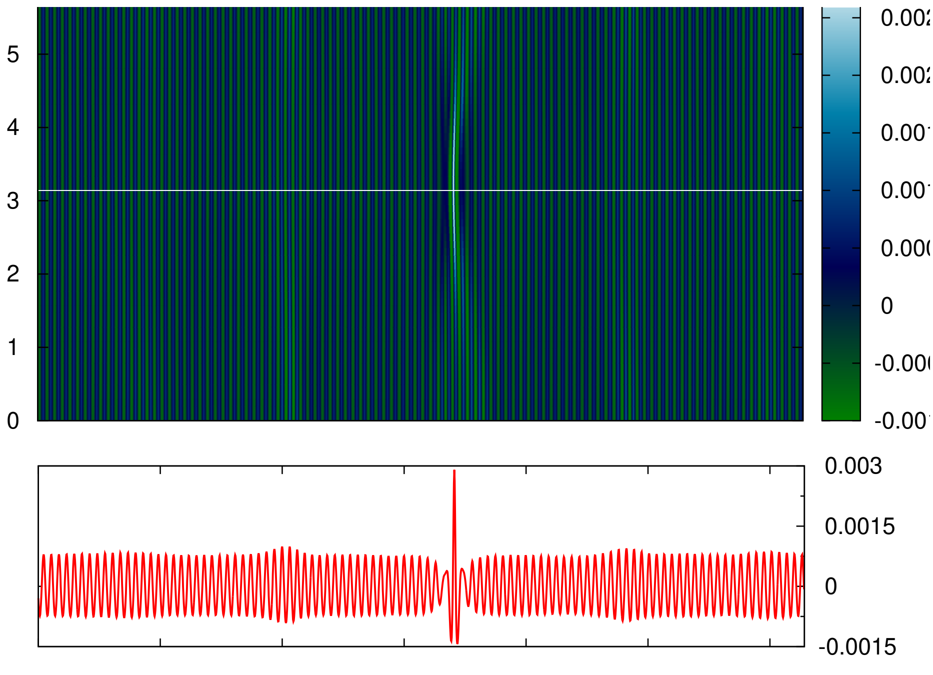

Рис. 3: Двумерная свободная поверхност при появлении волны экстремальной амплитуды. На нижнем рисунке показан профиль поверхности вдоль белой линии на верхнем рисунке, т.е. при $y = \pi$

6. Эффект от использования кластера в достижении целей работы

Численные эксперименты по изучению динамики двумерной поверхности проводились с помощью распараллеленной версии программы решения квазидвумерного уравнения Захарова с использованием ресурсов ИВЦ НГУ. Максимальное ускорение в 10 раз (по сравнению с нераспараллеленной версией кода) достигалось при использовании 24 ядер. Поэтому использование кластера оказало определяющее влияние для достижения целей работы.

7. Перечень публикаций, содержащих результаты работы

1. A.I. Dyachenko, D.I. Kachulin and V.E. Zakharov, Freak waves at the surface of deep water, J. Phys. Conf. Ser., 510, 012050 (2014)

   http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/510/1/012050/meta

   doi:10.1088/1742-6596/510/1/012050

   (WoS, Scopus, РИНЦ)

2. A.I. Dyachenko, D.I. Kachulin and V.E. Zakharov, Collisions of two breathers at the surface of deep water, Nat. Hazards Earth Syst. Sci., 13, 3205-3210 (2013)

   https://www.nat-hazards-earth-syst-sci.net/13/3205/2013/

   doi:10.5194/nhess-13-3205-2013

   (WoS, Scopus, РИНЦ)

   IF 2.67(Scopus), 2.510(WoS)

3. A.I. Dyachenko, D.I. Kachulin and V.E. Zakharov, On the nonintegrability of the free surface hydrodynamics, Письма в ЖЭТФ, 98 (1), 48-52 (2013) [JETP Lett., 98(1), 43-47 (2013)]

   http://www.jetpletters.ac.ru/ps/2012/article_30344.shtml

   doi:10.7868/S0370274X13130109

   (WoS, Scopus, РИНЦ)

   IF 1.235

4. A.I. Dyachenko, D.I. Kachulin and V.E. Zakharov, Freak-waves: Compact Equation vs Fully Nonlinear One, In: Extreme Ocean Waves, 2nd ed. Springer, E.Pelinovsky and C.Harif (Eds), pp. 23-44 (2016). ISBN 978-3-319-21575-4

   https://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-3-319-21575-4_2

   doi:10.1007/978-3-319-21575-4_2

   (Scopus)