

- Модель двухкомпонентной вязкой несжимаемой жидкости для задач размыва связного грунта
- Зимин А.И., Захаров Ю.Н., д-р физ.-мат. наук
- Научное содержание работы:

Постановка задачи

Россия обладает одним из самых обширных континентальных шельфов в мире. По некоторым оценкам на шельфе содержится около четверти запасов нефти и половины запасов газа.

На относительно небольших глубинах для добычи полезных ископаемых часто строят стационарные гравитационные платформы, которые удерживаются на дне благодаря огромной массе основания. Дно, на котором стоит такая платформа, обычно достаточно неоднородно: песок, глина, ил чередуются со скоплениями ракушек, гравия, гальки, валунов, а иногда и с выходами скальных пород в виде рифов и отдельных камней. Кроме того оно может иметь неровную структуру: желоба, долины, впадины, банки. Таким образом, остро встает задача обеспечения устойчивости платформы в водном бассейне.

Большие скорости течения, поверхностные волны, сложные вихревые структуры и т.д. приводят к размыву донного грунта около сооружения, что может значительно сказаться на общей устойчивости. Обычно для проверки возможного возникновения такой опасности проводят модельные лабораторные эксперименты. Однако в случае, когда грунт, на котором стоит платформа, является связным (например, глина) проведение лабораторных экспериментов технически не представляется возможным. Вследствие недостаточной изученности электростатических и электрохимических сил взаимодействия между частицами, которые играют существенную роль в процессах эрозии и транспорта связного грунта, инженерные методы также не могут обеспечить получение корректной картины размыва. Следовательно, становится актуальной задача поиска математической модели и проведения соответствующих численных расчетов для моделирования процесса размыва связного грунта.

Современное состояние проблемы

В решение вопроса размыва связного грунта можно выделить следующие подходы: геолого-инженерные методы и методы, основанные на математическом моделировании. К геолого-инженерным методам относятся эмпирические формулы, полученные на основе изучения гидравлики и проведения лабораторных экспериментов, и полуэмпирические формулы, полученные в результате комплексных теоретических и эмпирических исследований, раскрывающих в определенной мере физическую сущность процесса размыва. Также сюда следует отнести лабораторные опыты и гидродинамическое моделирование в волновых бассейнах. Методы, основанные на математическом моделировании, в свою очередь делятся на детерминистские и стохастические.

В данной работе среда, в которой происходит размыв связного грунта, рассматривалась состоящей из двух несмешивающихся вязких несжимаемых жидкостей. Для моделирования задач движения многокомпонентных сред используются сеточные и бессеточные подходы.

К бессеточным методам относится лагранжевый метод сглаженных частиц (SPH). Частицы не связаны между собой сеточными линиями и не ограничены таким образом в своих перемещениях в пространстве. По значениям физических величин, приписанных частицам, могут быть аппроксимированы непрерывные распределения этих величин в области. Бессеточные методы позволяют проводить расчеты течений с сильными деформациями границ расчетной области, допускающими изменение связности области и перехлест границ.

К широко известным сеточным методам относится метод Volume of Fluid, в котором было предложено ввести специальную функцию фазы (VOF). При наличии

фазы в точке значение этой функции равно единице, при отсутствии - ноль. Преимуществами метода VOF являются скромные вычислительные требования и теоретически возможная консервативность. Его недостатком является схемное диспергирование фазы, которое является следствием размазывания фронта функции VOF из-за схемной вязкости.

Для преодоления этого эффекта был разработан метод Level Set. В нем также вводится функция расстояния до свободной поверхности. Для задания разрыва плотности и вязкости на границе раздела фаз применяется специальная функция. Преимуществом метода является хорошая точность в определении геометрической формы контактной границы. Однако, поскольку функция уровня в явной форме не входит в уравнения сохранения, возможно нарушение баланса массы, импульса и т.д.

Важной особенностью механизма эрозии связного грунта является диффузионный перенос массы грунта, протекающий при взаимодействии воды и твердого вещества и оказывающий в ряде случаев большее воздействие на интенсивность размыва, чем гидродинамика потока. В рассмотренных выше подходах в двухкомпонентных средах не предполагается наличие диффузии массы, а главная цель заключается в выделении четкой границы раздела.

Подробное описание работы, включая используемые алгоритмы

Модель двухкомпонентной вязкой несжимаемой жидкости состоит из уравнения конвекции-диффузии для концентрации компоненты, соотношений для определения плотности и вязкости, а также гидродинамических уравнений Навье–Стокса для несжимаемой вязкой жидкости (с учетом переменной вязкости):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial C}{\partial t} + \sum_i v_i \frac{\partial C}{\partial x_i} = D \Delta C, \quad \rho = C(\rho_2 - \rho_1) + \rho_1, \quad \mu = C(\mu_2 - \mu_1) + \mu_1, \\ \frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_j v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \left(-v_i D \Delta \rho - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(2\mu \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) + \right. \\ \left. + \sum_{j \neq i} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right) \right) + f_i, \quad i = 1, 2, 3, \\ \sum_{j=1}^3 \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0, \end{array} \right. \quad (1)$$

где C – объемная концентрация одной из компонент (более плотной и вязкой), (v_1, v_2, v_3) – вектор скорости движения смеси в точке (x_1, x_2, x_3) и момент времени t , D – коэффициент диффузии, μ – динамическая вязкость смеси, ρ – плотность смеси, $\rho_1, \rho_2, \mu_1, \mu_2$ – постоянные плотности и вязкости двух компонент, (f_1, f_2, f_3) – вектор массовых сил, P – давление в смеси.

Чаще всего связный грунт является слабопроницаемым для воды. Это значит, что лишь верхний намокший слой грунта находится в вязко-текучем состоянии, в то время как внутренние слои находятся в прочном пластическом состоянии. Таким образом, процесс размокания начинается с поверхности грунта. Затем его наружные слои постепенно отделяются, обнажая новые поверхности для взаимодействия с водой. Для того чтобы смоделировать процесс размокания вещества, которое является связным грунтом, был разработан алгоритм. Как только концентрация в каком-то месте граничного слоя становится меньше некоторой заданной величины C^* считается, что там

жидкости проникло достаточно для того чтобы сделать примыкающую часть области расчетной.

Для дискретизации системы (1) по пространственным переменным используется метод конечных разностей на прямоугольной равномерной сетке с шахматным расположением узлов: давление, дивергенция скорости и концентрация компоненты определяются в центрах ячеек, а компоненты вектора скорости – на границах ячеек. Применение разнесенной сетки позволяет связать значения скорости и давления в соседних узлах и избежать появления осцилляций в решении, которые возникают при использовании центральных разностей на совмещенной сетке. Также шахматное расположение узлов позволяет автоматически удовлетворять дискретному представлению уравнения неразрывности.

Алгоритм движения по времени состоит из следующих этапов:

- С учетом известных вектора скорости и распределения концентрации (а значит и значений плотности и вязкости), совершается шаг по времени для системы уравнений Навье-Стокса.
- Используя полученные значения компонент скорости, совершается шаг по времени для уравнения конвекции-диффузии.
- Производится пересчет значений плотности и вязкости в среде по формулам из (1). Затем следует переход на первый этап следующей итерации по времени.

Для решения системы уравнений Навье-Стокса используется схема расщепления по физическим факторам, с учетом переменной плотности. Она включает в себя три шага. На первом шаге происходит перенос количества движения только за счет конвекции и диффузии, по неявной схеме вычисляется промежуточное поле скоростей \vec{V} :

$$\frac{\vec{V} - V^n}{\Delta t} = -(\mathbf{V}^n \cdot \nabla) \vec{V} + \frac{1}{\rho} \left(-\vec{V} D \Delta \rho + \mu \Delta \vec{V} + (\nabla \mu \cdot \nabla) \vec{V} + (\nabla \mu \cdot J_V) \right) + \vec{F}, \quad (2)$$

где J_V – матрица Якоби, имеющая вид

$$J_V = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}.$$

Для решения системы (2) используется схема предиктор-корректор. Полученная система алгебраических уравнений решается методом прогонки.

При этом, не смотря на то, что полученное промежуточное поле скоростей \vec{V} не удовлетворяет уравнению неразрывности, оно имеет физический смысл, так как сохраняет вихревые характеристики во внутренних точках.

На втором шаге по найденному промежуточному полю скоростей \vec{V} рассчитывается поле давления:

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} \right) = \frac{\nabla \vec{V}}{\Delta t} \quad (3)$$

Для решения этого этапа вычислительного процесса используется градиентный итерационный метод BiCGStab.

На третьем шаге перенос количества движения осуществляется только за счет градиента давления:

$$\frac{V^{n+1} - \vec{V}}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p^{n+1}. \quad (4)$$

Уравнение (3) получается путем взятия дивергенции от обеих частей равенства (4) с учетом того, что $\nabla V^{n+1} = 0$.

Для решения уравнения конвекции-диффузии из (1) используется схема предиктор-корректор с аппроксимацией конвективных слагаемых против потока. Полученная система алгебраических уравнений решается методом прогонки.

Полученные результаты

Были получены двух- и трехмерные расчеты для задач распространения активной примеси и задач размыва связного грунта. Результаты доложены на конференциях и опубликованы в статьях.

Иллюстрации, визуализация результатов

На рис. 1, 2 показаны варианты динамики распространения пятна примеси при различных плотности и вязкости.

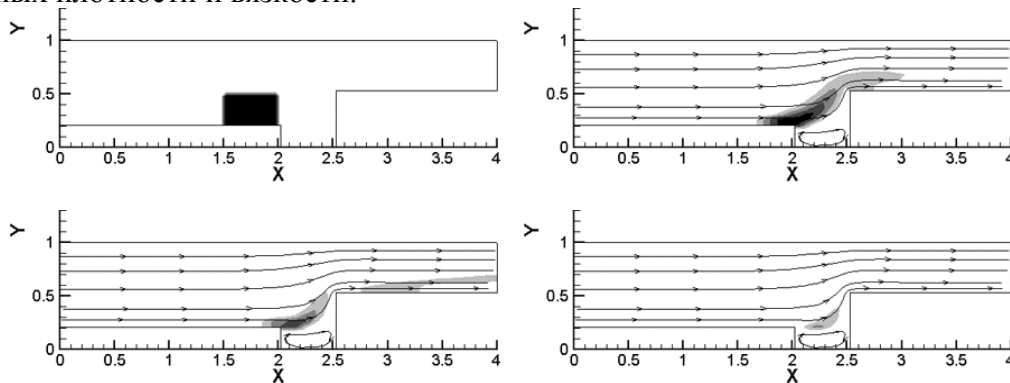


Рисунок 1 - Распространение пассивной примеси при условиях $\mu_1 = 0.01$, $\mu_2 = 0.01$, $\rho_1 = 1.0$, $\rho_2 = 1.0$ на различные моменты времени

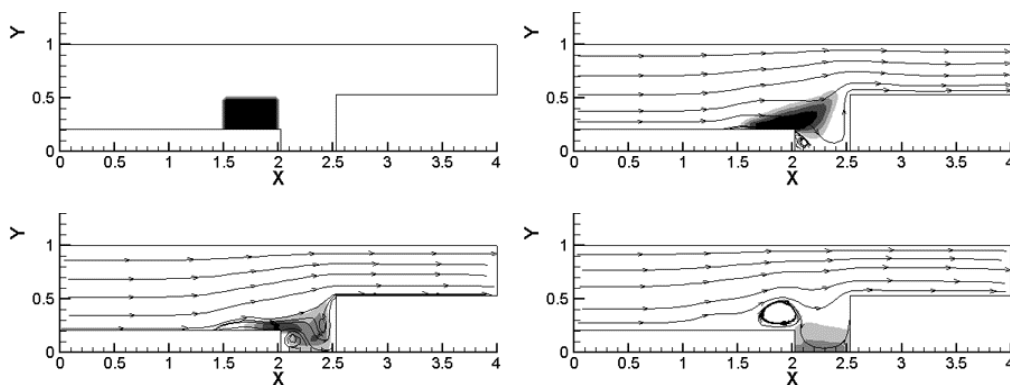


Рисунок 2 - Распространение примеси при условиях $\mu_1 = 0.01$, $\mu_2 = 1.0$, $\rho_1 = 1.0$, $\rho_2 = 100.0$ на различные моменты времени

Видно, что примесь за счет эффекта силы тяжести сползает в яму, когда имеет большую, чем у жидкости плотность и вязкость, после чего распространение происходит в большей степени благодаря диффузионной, нежели конвективной составляющей процесса распространения. Напротив, при равенстве гидродинамических параметров примесь фактически не задерживается в области.

На рис.3 представлена картина распространения достаточно плотной и вязкой примеси под неподвижным препятствием.

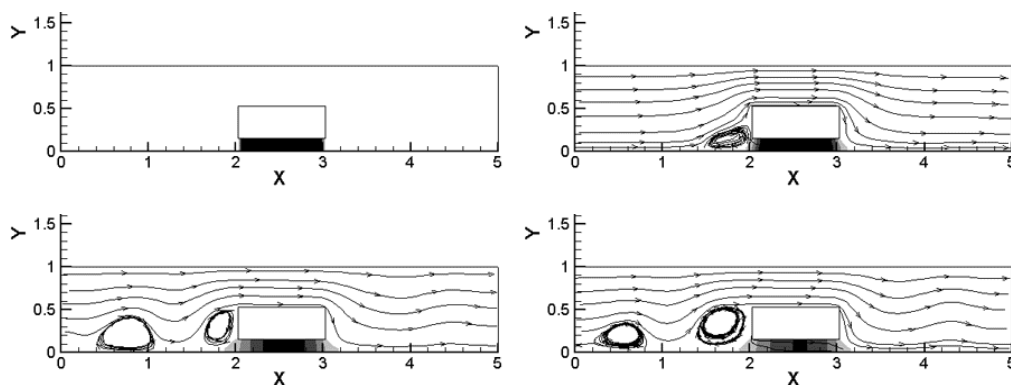


Рисунок 3 - Размытие примеси при условиях $\mu_1 = 0.01$, $\mu_2 = 1.0$, $\rho_1 = 1.0$, $\rho_2 = 100.0$ на различные моменты времени $t=1;3500;50000;100000$.

Основная часть потока огибает препятствие сверху. При этом характерное значение горизонтальной составляющей скорости верхней части потока на несколько порядков больше аналогичного значения скорости в примеси под препятствием.

На рис. 4, 5 приведены результаты расчетов размытия участка связного грунта для двухмерного и трехмерного случаев.

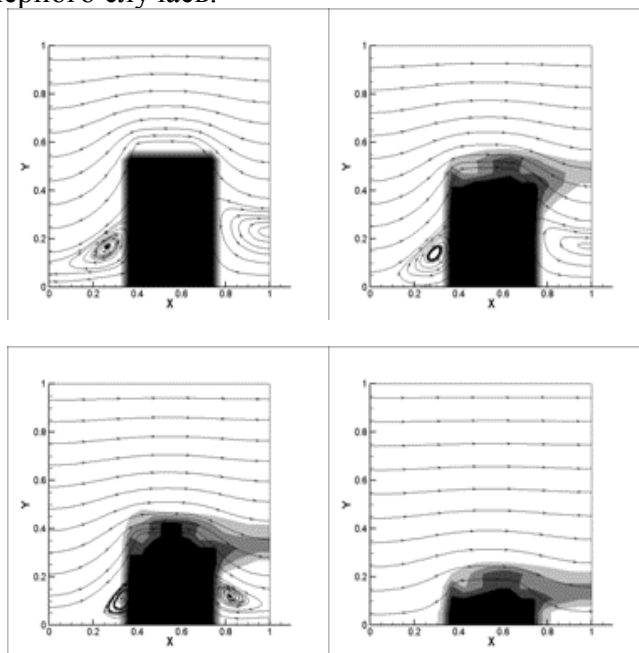


Рисунок 4 – Размытие вещества при условиях порогового значения $C^* = 0.1$ на различные моменты времени $t=1;2;7;14$.

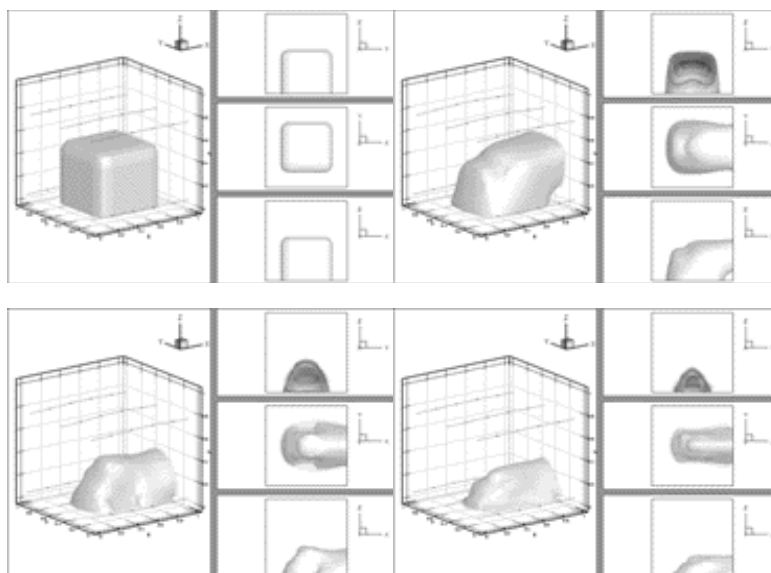


Рисунок 5 – Размытие вещества при условиях порогового значения $C^* = 0.1$ на различные моменты времени $t=1;240;560;880$.

Очевидно, что пороговое значение концентрации влияет не только на динамику и процесс размыва вещества, но и на общую картину течения. Кроме того следует отметить, что в трехмерном случае жидкость омывает вещество со всех сторон, вследствие чего отсутствуют вихри и происходит активный размыв вещества на боковых участках.

На рис. 6 приведена динамика размыва примеси вблизи стоящего на дне препятствия в виде параллелепипеда

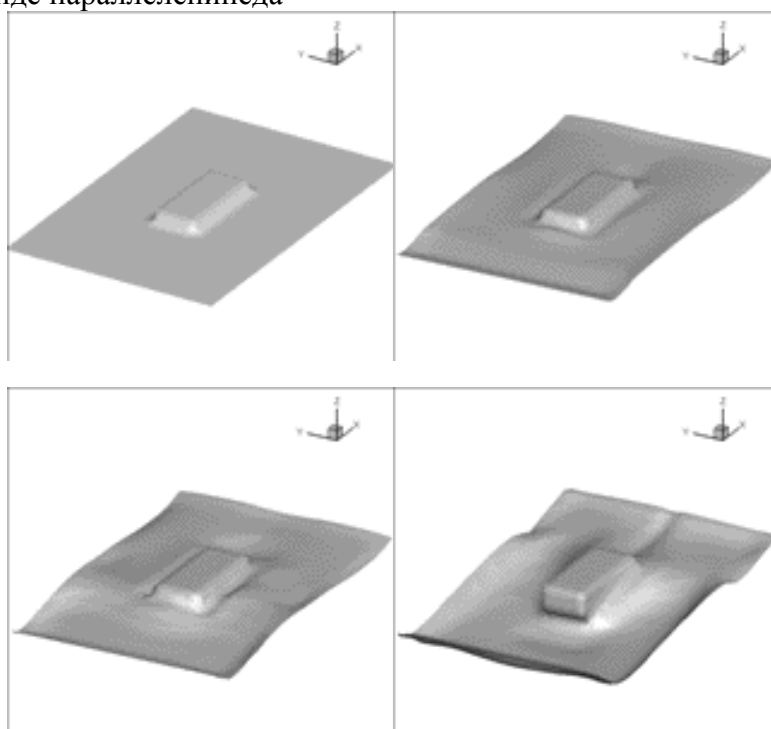


Рисунок 6 – Размытие вещества на различные моменты времени $t=1;16;28;58$.

- Все расчеты выполнены на кластере, эффект положительный
- Перечень публикаций:
 - Милошевич Х., Захаров Ю.Н., Контрец Н., Зимин А.И., Нуднер И.С., Рагулин В.В. Об одной модели размыва связного грунта и движения поверхностных волн

// Вестник Кемеровского государственного университета, № 2 (62) Т. 1, 2015, стр. 35-40 (Журнал, рекомендованный ВАК)

- Zakharov Y., Zimin A., Nudner I., Ragulin V. Two-Component Incompressible Fluid Model for Simulating the Cohesive Soil Erosion // Applied Mechanics and Materials, Vols. 725-726 (2015), pp 361-368 (Индексация в международной системе цитирования Scopus)
- Результаты докладывались на 12 конференциях в период с 2012 по 2015 года
- Впечатления положительные, нареканий и причин для недовольства нет, надеюсь на дальнейшую совместную работу