

Отчет о проделанной работе с использованием оборудования ИВЦ НГУ

Аннотация

Предложен новый подход к расчету мультисолитонных и мультибризерных волновых полей в рамках модели одномерного фокусирующего уравнения Шрёдингера (НУШ). Данный алгоритм, основанный на применении метода одеяния дополненной арифметикой произвольной точности позволил впервые рассчитать волновые поля состоящие из 100 и более взаимодействующих солитонов/бризеров НУШ. С помощью разработанного алгоритма была исследована статистика плотного газа солитонов НУШ, предложены новые подходы к кодированию и передачи информации в оптоволоконных каналах связи, а также представлены новые сценарии формирования волн экстремальной из спонтанно возмущенной неустойчивой плоской волны. Разработанные алгоритмы являются важным элементом в полной численной схеме метода обратной задачи рассеяния, разработка которой ведется в настоящее время различными коллективами исследователей. Предложенные алгоритмы могут применяться для моделирования широкого круга нелинейных волновых процессов, таких как распространение света в оптическом волокне и распространение гравитационных волн на поверхности глубокой жидкости. Кроме того, данные алгоритмы могут быть легко обобщены на другие интегрируемые модели, такие как уравнение КдВ и Sine-Gordon.

Тема работы

Решение прямой и обратной задачи рассеяния в рамках модели нелинейного уравнения Шрёдингера.

Состав коллектива

Гелаш Андрей Александрович, к.ф.-м.н., н.с. ФФ НГУ.

Информация о гранте

РНФ, Конкурс 2017 года по мероприятию "Проведение инициативных исследований молодыми учеными" Президентской программы исследовательских проектов, реализуемых ведущими учеными, в том числе молодыми учеными. Грант номер 17-71-10128 "Новые подходы к передаче и кодированию информации на основе метода обратной задачи рассеяния"

Научное содержание работы

Постановка задачи

Проект был направлен на разработку новых численных подходов для решения прямой и обратной задачи рассеяния в рамках модели нелинейного уравнения Шрёдингера. С помощью разработанных алгоритмов исследовались различные сценарии эволюции нелинейных волновых полей и разрабатывались новые методы передачи информации в оптическом волокне.

Современное состояние проблемы

Метод обратной задачи рассеяния (МОЗР) является мощным теоретическим инструментом современной математической физики, который позволяет полностью проинтегрировать широкий класс нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных [1]. К этому классу относятся такие важные модели нелинейной физики как уравнения КдВ, Sine-Gordon и нелинейное уравнение Шрёдингера (НУШ).

Модель НУШ описывает распространение слабо модулированного волнового пакета в различных нелинейных средах. Одним из наиболее важных приложений модели НУШ является распространение света в оптическом волокне с Керровской нелинейностью.

МОЗР позволяет построить взаимно-однозначное соответствие между волновым полем и так называемыми данными рассеяния. Данные рассеяния меняются тривиальным образом в процессе нелинейной эволюции волнового поля, что открывает широкие возможности как для фундаментальных исследований, так и для практических приложений. Так, например, зная данные рассеяния можно сделать выводы о причинах формирования когерентных волновых структур в процессе эволюции волнового поля. Практическое применение связано с возможностью передачи информации закодированной в данных рассеяния передаваемого оптического сигнала [2].

Теоретические основы МОЗР для НУШ были разработаны в 70-х и 80-х годах прошлого века [3,4]. Полная схема МОЗР состоит из решения прямой задачи рассеяния (нахождение данных рассеяния по заданному волновому полю) и обратной задачи рассеяния (восстановление волнового поля по данным рассеяния). МОЗР имеет серьезные отличия для разных типов граничных условий. Разработке численных алгоритмов решения прямой и обратной задач рассеяния в последнее время уделяется очень большое внимание (см. обзор [2]). Тем не менее, до сих пор не существует полного набора численных алгоритмов позволяющих решить прямую и обратную задачу рассеяния для произвольного волнового поля.

[1] S. Novikov, S. V. Manakov, L. P. Pitaevskii, and V. E. Zakharov, *Theory of Solitons: The Inverse Scattering Method* (Springer Science & Business Media, New York, 1984).

[2] Sergei K. Turitsyn, Jaroslaw E. Prilepsky, Son Thai Le, Sander Wahls, Leonid L. Frumin, Morteza Kamalian, and Stanislav A. Derevyanko, "Nonlinear Fourier transform for optical data processing and transmission: advances and perspectives," *Optica* 4, 307-322 (2017)

[3] V. E. Zakharov and A. B. Shabat, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 61, 118 (1971) [*Sov. Phys. JETP* 34, 62 (1972)].

[4] E. D. Belokolos, A. I. Bobenko, A. R. Enol'skii, V. Z. Its, and V. B. Matveev, *Algebro-Geometric Approach to Nonlinear Integrable Equations* (Springer-Verlag, Berlin, 1994).

Подробное описание работы, включая используемые алгоритмы

Нами был разработан численный алгоритм решения обратной задачи рассеяния для мультисолитонных волновых полей НУШ. В основе его лежит так называемый "метод одевания дополненный арифметикой произвольной точности. Мультисолитонные волновые поля являются точными решениями интегрируемых уравнений, в том числе и в случае НУШ. Однако, аналитические формулы с помощью которых они записаны являются неустойчивыми с численной точки зрения. Например, одна из известных форм записи N -солитонного решения (здесь N - это число солитонов) представляет собой отношение двух детерминантов размера $N \times N$. Уже при $N \sim 10$ вычисление этих детерминантов может стать численно неустойчивым.

По этой причине, несмотря на наличие точных формул, мультисолитонные решения с $N \gtrsim 10$ никогда ранее не строились и не изучались (не только для НУШ, но и для всех остальных интегрируемых уравнений). Между тем, широкий спектр актуальных задач связан с исследованием волновых полей состоящих из сотен солитонов НУШ. К ним относятся прикладные задачи, связанные с плотной передачей данных в оптоволокне, а также фундаментальные задачи, связанные с изучением статистики волнового поля НУШ.

На рисунках 1(a,b) представлены примеры построения 128-ми солитонных решений НУШ с помощью предложенного нами численного алгоритма. Представленные на данных рисунках комплексные собственные числа солитонов характеризуют амплитуды солитонов (мнимая часть) и скорости (действительная часть). Данные волновые поля использовались в дальнейшем, в качестве начальных условий для исследования статистики плотного газа солитонов НУШ (см. отчет Д.С. Агафонцева). Также нами были предложены новые подходы к кодированию и передаче информации в оптоволоконных каналах связи на основе разработанного алгоритма (еще не опубликованы).

Также нами был разработан аналогичный алгоритм для генерации N -бризерных решений НУШ. Генерация мультибризерных решений особенно интересна с точки зрения развития теории волн экстремальной амплитуды, поскольку позволят продемонстрировать, каким образом подобные волновые события могут возникать из спонтанно возмущенной неустойчивой плоской волны – см. рисунки 2.

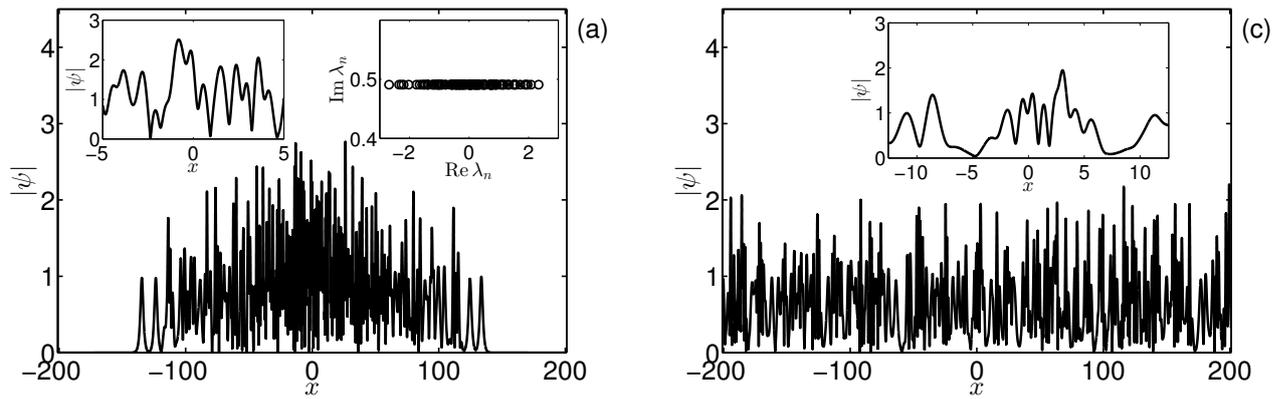


Рис. 1: Пример построения 128-ми солитонного решения (на вставке слева показаны собственные числа солитонов), которое было сгенерировано с помощью разработанного нами численного алгоритма метода одевания, дополненного арифметикой произвольной точности. Справа представлено данное многосолитонное волновое поле после длительной эволюции (стохастизации) в численном боксе с периодическими граничными условиями. Волновое поле справа представляет пример сильно взаимодействующего (плотного) статистически однородного солитонного газа, который являлся предметом нашего исследования. Рисунок из работы [AG1].

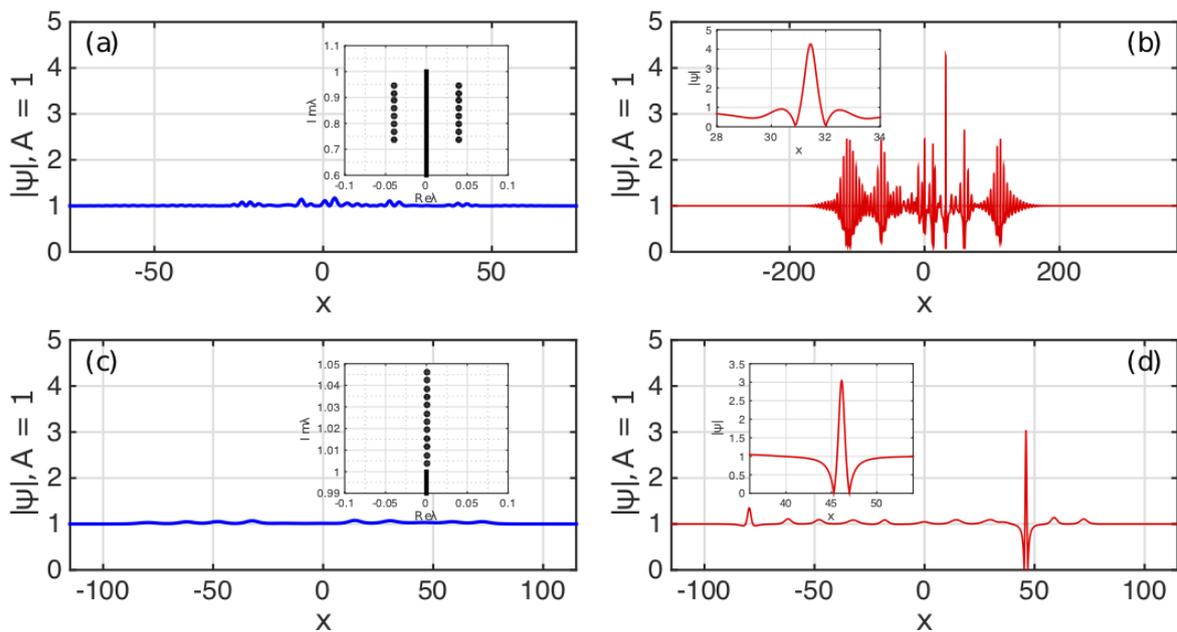


Рис. 2: Формирование волн большой амплитуды из неустойчивой плоской волны, локально возмущенной случайным ансамблем суперрегулярных бризеров НУШ (а,b) и солитонов (бризеров) Кузнецова-Ма (с,d). Рисунок из работы [AG2].

Эффект от использования кластера в достижении целей работы

Для выполнения задач проекта требовалась генерация статистически больших ансамблей 128-солитонных решений НУШ. Расчет одного такого начального условия с применением арифметики произвольной точности на одном ядре занимает порядка суток, что делает подобные расчеты на обычных рабочих станциях практически невозможными. Поэтому, использование кластера оказало определяющее влияние на достижение целей работы. Для решения задач на определение спектра собственных чисел задачи Захарова-Шабата нам потребовалось задействовать большой объем оперативной памяти (более 100 Гб). При этом ресурсы кластера снова позволили справиться с этой задачей. Установленное на кластере программное обеспечение Wolfram Mathematica позволило нам использовать арифметику произвольной точности, в то время как программное обеспечение Matlab позво-

лило реализовать быстрые алгоритмы обработки данных расчетов на стороне сервера, без выгрузки объемных данных на персональный компьютер.

Перечень публикаций, содержащих результаты работы

[AG1] A.A. Gelash, and D.S. Agafontsev, Strongly interacting soliton gas and formation of rogue waves // Physical Review E, 2018, 98, 042210. Импакт фактор журнала = 2.284.

[AG2] A.A. Gelash, Formation of rogue waves from a locally perturbed condensate // Physical Review E 2018, 97, 022208. Импакт фактор журнала = 2.284.

Тексты публикаций содержат благодарность ИВЦ НГУ.