

Отчет о проделанной работе с использованием оборудования ИВЦ НГУ

15 декабря 2021 г.

1 Аннотация

Построена теория возмущений для данных рассеяния прямоугольного потенциала в рамках модели нелинейного уравнения Шредингера. Для проверки этой теории были проведены численные расчёты данных рассеяния для нескольких тысяч статистических реализаций прямоугольного потенциала со случайным шумом. Показано, что теория возмущений хорошо описывает реальные изменения данных рассеяния. Также построена солитонная модель прямоугольного потенциала в рамках модели нелинейного уравнения Шредингера. Для ее визуализации и исследования асимптотических свойств были проведены расчёты мульти-солитонных решений с числом солитонов от 32-х до 1024-х. Показано, что при увеличении числа солитонов, предложенная модель асимптотически стремится к прямоугольному потенциалу за исключением осцилляций постоянной амплитуды на краях, относительная ширина которых уменьшается.

2 Тема работы

Применение численных алгоритмов метода обратной задачи рассеяния для исследования нелинейных волновых полей.

3 Состав коллектива

Гелаш Андрей Александрович, к.ф.-м.н., с.н.с. ИАиЭ СО РАН.
Муляджанов Илья Илхамович, студент магистратуры ММФ НГУ.

4 Информация о гранте

РФФИ, Конкурс 2019 года на лучшие проекты фундаментальных научных исследований, выполняемые молодыми учеными - кандидатами наук в научных организациях РФ "Перспектива". Грант номер 19-31-60028 "Статистическое поведение фазовых параметров данных рассеяния в случайных нелинейных волновых процессах". РФФИ, Конкурс 2020 года «Проведение инициативных исследований молодыми учеными» Президентской программы исследовательских проектов, реализуемых ведущими учеными, в том числе молодыми учеными. Грант номер 20-71-00022 "Устойчивый алгоритм решения прямой и обратной задачи рассеяния для сложных нелинейных волновых полей".

5 Научное содержание работы

5.1 Постановка задачи

Изучается начальное условие в виде прямоугольного потенциала с шумом малой амплитуды в рамках модели нелинейного уравнения Шредингера. Задача состоит в том, чтобы теоретически и численно

найти параметры солитонов входящих в данный потенциал, а также продемонстрировать как выглядит волновое поле соответствующее этим солитонам.

5.2 Современное состояние проблемы

Теоретическое описание нелинейной эволюции прямоугольного волнового поля с наложенным на него шумом малой амплитуды представляет практический и фундаментальный интерес. С одной стороны, короткие прямоугольные импульсы являются простейшими оптическими сигналами в оптоволоконных линиях связи, с другой стороны – протяженные прямоугольные импульсы модуляционно неустойчивы и описание нелинейной стадии данной неустойчивости является открытой проблемой математической физики.

Одним из подходов к решению данной задачи является метод обратной задачи рассеяния (МОЗР), который позволяет полностью проинтегрировать нелинейные уравнения Шредингера (НУШ) [1]. Кроме того, МОЗР позволяет построить взаимно-однозначное соответствие между волновым полем и так называемыми данными рассеяния. Данные рассеяния меняются тривиальным образом в процессе нелинейной эволюции волнового поля, что открывает широкие возможности как для фундаментальных исследований, так и для практических приложений. Таким образом, если найти данные рассеяния в начальный момент времени, то они будут известны для всех этапов эволюции. Для того, чтобы это сделать можно применить теорию возмущений МОЗР [2]. Однако, данная задача является непростой, так как требует нахождения не только собственных чисел, но и нормировочных констант солитонов. Кроме того, проверка теоретических расчетов требует применения устойчивых численных алгоритмов МОЗР, таких как были недавно разработаны в [3] и [4].

[1] S. Novikov, S. V. Manakov, L. P. Pitaevskii, and V. E. Zakharov, Theory of Solitons: The Inverse Scattering Method (Springer Science & Business Media, New York, 1984).

[2] Y. S. Kivshar and B. A. Malomed, Rev. Mod. Phys. 61, 763 (1989).

[3] A.A. Gelash, and D.S. Agafontsev, Strongly interacting soliton gas and formation of rogue waves, Physical Review E, 2018, 98, 042210.

[4] A. Gelash and R. Mullyadzhanov, Phys. Rev. E 101, 052206 (2020).

5.3 Подробное описание работы, включая используемые алгоритмы

Проведена численная проверка теории возмущений для данных рассеяния прямоугольного волнового поля с шумом, разработанной в [P1]. Для этого были сгенерированы несколько тысяч реализаций прямоугольного потенциала со случайным шумом. Теория позволяет определить величину стандартных отклонений для данных рассеяния солитонов, входящих в потенциал, а именно для собственных чисел солитонов ζ_n и нормировочных констант солитонов ρ_n , где n обозначает порядковый номер солитона. Результаты представлены на Рис. 1, который показывает облака точек в комплексной плоскости, соответствующих значениям данных рассеяния в различных реализациях прямоугольного потенциала с шумом. Также показано сравнение численных и теоретических распределений для действительных и мнимых частей данных рассеяния. Можно видеть, что теория хорошо описывает данные, полученные в численных расчетах. Расчеты проводились с помощью алгоритмов решения прямой задачи рассеяния НУШ с применением арифметики высокой точности.

Кроме того, построена солитонная модель прямоугольного волнового поля. Для этого были вычислены специфические поправки к данным рассеяния солитонов, связанные с удалением непрерывного спектра, см. [P2]. Для того, чтобы изучить асимптотические свойства построенной модели были вычислены соответствующие N -солитонные решения с числом солитонов N от 32 до 1024. Результаты представлены на Рис. 2. Оказалось, что построенная солитонная модель асимптотически с ростом N стремится к прямоугольному потенциалу за исключением осцилляций на краях волнового поля, амплитуда которых остается постоянной. Однако, относительная ширина области занятой данными осцилляциями асимптотически стремится к нулю, см. Рис. 2.

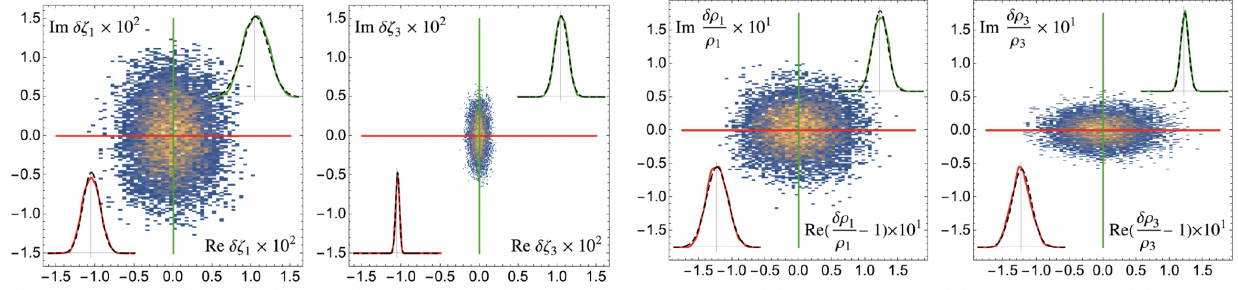


Рис. 1: Данные рассеяния солитонов для 10^4 реализаций случайного шума, наложенного на прямоугольный потенциал ширины 12 и амплитуды 1. Точки соответствуют комплексным собственным числам ζ_n и нормировочным константам ρ_n солитонов, полученных численно с помощью решения прямой задачи рассеяния. Центр графиков соответствует точному значению данных рассеяния в отсутствие шума, то есть графики демонстрируют отклонения данных рассеяния, вызванные шумом. Также на вставках показано сравнение численных (зеленые и красные линии) и теоретических (черный пунктир) распределений для действительных и мнимых частей данных рассеяния. Рисунок из работы [P1].

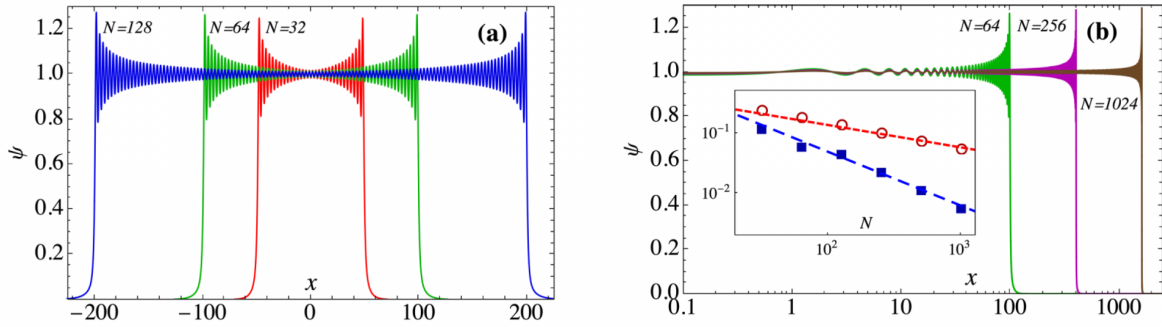


Рис. 2: Солитонная модель прямоугольного волнового поля. Показаны мульти-солитонные волновые поля с числом солитонов $N = 32, 64, 128, 256$ и 1024 . Вставка демонстрирует как относительная ширина остаточных осцилляций на краях уменьшается с увеличением числа солитонов. Рисунок из работы [P2].

6 Эффект от использования кластера в достижении целей работы

Для выполнения задач проекта потребовалось решить численно прямую задачу рассеяния для 10^4 реализаций начального шума, добавленного к прямоугольному потенциалу. Данную задачу удалось эффективно распараллелить и запустить на нескольких десятках ядер кластера, что позволило быстро получить результат. Для построения мульти-солитонных решений НУШ содержащих до тысячи солитонов также удалось эффективно распараллелить расчет. Кроме того, для решения некоторых задач на определение спектра собственных чисел задачи Захарова-Шабата потребовалось задействовать объем оперативной памяти более 100 Гб. Установленное на кластере программное обеспечение Wolfram Mathematica позволило нам использовать арифметику произвольной точности для аккуратной идентификации фаз солитонов, в то время как программное обеспечение Matlab позволило реализовать быстрые алгоритмы обработки данных расчетов на стороне сервера, без выгрузки объемных данных на персональный компьютер.

7 Перечень публикаций, содержащих результаты работы

[P1] R. Mullyadzhyanov, A. Gelash, Solitons in a box-shaped wavefield with noise: perturbation theory and statistics, // Physical Review Letters, 2021, 126, 234101. Импакт фактор журнала = 9.1.

[P2] A. Gelash, D. Agafontsev, P. Suret, S. Randoux, Solitonic model of the condensate // Physical Review E 2021, 104(4), 044213. Импакт фактор журнала = 2.7.

Тексты публикаций содержат благодарность ИВЦ НГУ.